KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
ATURAN PERKALIAN DAN PENJUMLAHAN

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini diharapkan Kalian dapat menjelaskan aturan perkalian dan penjumlahan, menganalisis aturan perkalian dan penjumlahan melalui masalah kontekstual, serta mampu menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan aturan perkalian dan penjumlahan.

B. Uraian Materi

1. Aturan Perkalian

Sebelum kita membahas prinsip dasar aturan perkalian, perhatikan dua masalah berikut!

Masalah 1.1. Melambungkan Sekeping Uang Logam dan Sebuah Dadu

Di SMP, kalian telah mempelajari tentang ruang sampel. Banyak anggota ruang sampel dari sekeping mata uang logam ada 2, yaitu Angka dan Gambar atau bisa ditulis dengan S_1 = {A, G}. Banyak anggota ruang sampel dari sebuah dadu ada 6, yaitu mata dadu 1, 2, 3, 4, 5, dan 6 atau bisa ditulis dengan S_2 = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

a. Ambillah sekeping mata uang logam dan sebuah dadu, kemudian lambungkan keduanya bersama-sama.
b. Catatlah hasil-hasil yang mungkin berupa pasangan berurutan. Misalnya, jika setelah melambungkan uang logam dan dadu tersebut diperoleh sisi gambar pada uang dan angka 1 pada dadu, maka ditulis dalam pasangan berurutan (A, 1).

Gambar 2. Uang Logam dan Dadu
Sumber: https://edtans.wordpress.com dan www.pngegg.com

c. Dapatkah kalian menentukan semua hasil yang mungkin berupa pasangan berurutan dari percobaan di atas?

Nah, untuk menjawab pertanyaan ini, kita membuat tabel untuk mencatat semua hasil yang mungkin dari percobaan seperti berikut ini.

dadu / uang logam	1	2	3	4	5	6
A	(A, 1)	(A, 2)	(A, 3)	(A, 4)	(A, 5)	(A, 6)
G	(G, 1)	(G, 2)	(G, 3)	(G, 4)	(G, 5)	(G, 6)

Kalau kita mendaftarnya, kita bisa menuliskan semua hasil yang mungkin sebagai anggota himpunan ruang sampel S berikut ini.

S = {(A, 1), (A, 2), (A, 3), (A, 4), (A, 5), (A, 6), (G, 1), (G, 2), (G, 3), (G, 4), (G, 5), (G, 6)}

Banyak anggota dari ruang sampel S atau ditulis $n(S) = 12$. Berarti banyak hasil yang mungkin dari pelambungan sekeping mata uang logam dan sebuah dadu adalah 12.

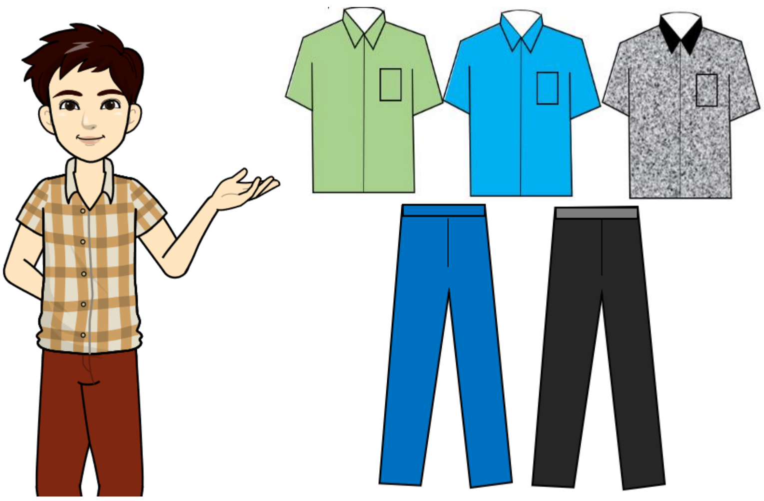
Coba kita mencari hubungan antara $n(S) = 12$ dengan banyaknya hasil yang mungkin untuk objek mata uang logam yakni $n(S_1) = 2$ dan banyaknya hasil yang mungkin untuk objek dadu yakni $n(S_2) = 6$.

Kalau kita amati secara seksama ternyata $n(S) = 12 = 2 \times 6 = n(S_1) \times n(S_2)$.

Atau $n(S)$ merupakan hasil perkalian antara banyak cara munculnya hasil yang mungkin pada sekeping mata uang logam dengan banyak cara munculnya hasil yang mungkin pada sebuah dadu.

Masalah 1.2

Faisal memiliki 4 baju yang berbeda warna, yaitu coklat motif kotak, hijau, biru, dan abu-abu. Dia juga mempunyai 3 celana panjang yang warnanya berbeda, yaitu coklat, biru dan hitam seperti pada gambar di bawah ini.



Gambar 3. Koleksi Baju dan Celana Panjang Faisal
Sumber: Koleksi Pribadi

Dapatkah kalian menolong Faisal untuk menentukan banyaknya stelan baju dan celana berbeda yang dapat digunakan Faisal?

Nah, untuk menjawab pertanyaan ini, kalian bisa memulai dengan mendaftar anggota ruang sampel dari himpunan baju dan celana Faisal seperti berikut ini.

- Ruang sampel baju Faisal adalah B = {coklat kotak, hijau, biru, abu-abu} atau ditulis lebih sederhana B = {ck, hj, b, a}.
- Ruang sampel celana Faisal adalah C = {coklat, biru, hitam} atau C = {ck, h}

Selanjutnya, kalian dapat membuat tabel untuk mencatat semua stelan baju dan celana berbeda seperti berikut ini.

Celana \ Baju	coklat kotak	hijau	biru	Abu-abu
coklat	(ck, ck)	(ck, hj)	(ck, b)	(ck, a)
biru	(b, ck)	(b, hj)	(b, b)	(b, a)
hitam	(h, ck)	(h, hj)	(h, b)	(h, a)

Dari tabel di atas diperoleh banyaknya stelan baju dan celana berbeda yang dapat digunakan Faisal ada 12.

Jika dihubungkan dengan banyak baju dan celana berbeda yang dimiliki Faisal, maka kita bisa menuliskan $12 = 4 \times 3 = n(B) \times n(C)$.

Atau banyak stelan baju dan celana berbeda yang dapat digunakan Faisal merupakan hasil perkalian antara banyak baju berbeda dengan banyak celana berbeda yang dimiliki Faisal.

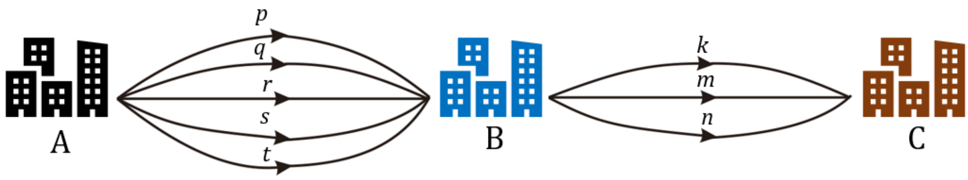
Dua masalah di atas memberikan gambaran mengenai cara mencacah yang disebut **aturan perkalian**.

Secara khusus aturan perkalian berbunyi sebagai berikut.

"Jika kejadian pertama dapat terjadi dalam m cara dan setiap kejadian pertama diikuti oleh kejadian kedua yang terjadi dalam n cara, maka kejadian pertama dan kejadian kedua tersebut secara bersama-sama terjadi dalam $(m \times n)$ cara."

Contoh 1.

Diagram di bawah ini menunjukkan alur atau pilihan jalan untuk bepergian dari kota A ke kota C melalui kota B.



Gambar 4. Alur dari Kota A ke Kota C
Sumber: Koleksi Pribadi

Amir berada di kota A dan berencana bepergian ke kota C melalui kota B. Berapa banyak jalan berbeda yang dapat dilalui oleh Amir.

Jawab:

Dari kota A ke B ada 5 jalan berbeda, yaitu jalan p, q, r, s, dan t.
Dari kota B ke C ada 3 jalan berbeda, yaitu jalan k, m, dan n.
Berdasarkan aturan perkalian, dari kota A ke C melalui kota B ada $5 \times 3 = 15$ jalan berbeda.
Jadi, banyak jalan yang dapat dilalui Amir dari kota A menuju kota C melalui kota B adalah 15 jalan berbeda.

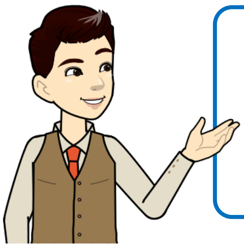
Contoh 2.

Pada suatu kelas akan dibentuk sebuah kepengurusan yang terdiri dari satu ketua kelas dan satu sekretaris. Ada berapa kepengurusan yang mungkin terbentuk jika ada 5 calon ketua kelas dan 6 calon sekretaris?

Jawab:

Perhitungan banyak kepengurusan kelas sebagai berikut:
Pemilihan ketua kelas = 5 kemungkinan
Pemilihan sekretaris = 6 kemungkinan
Sehingga kepengurusan yang mungkin terbentuk sebanyak $5 \times 6 = 30$ kemungkinan.

Untuk beberapa kejadian, aturan perkalian dapat diperluas sebagai berikut.



"Jika ada k kejadian (pilihan) dengan setiap kejadian (pilihan) memiliki hasil $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$ yang berbeda, maka banyak hasil berbeda yang mungkin dari k kejadian (pilihan) tersebut secara berurutan diberikan oleh hasil kali : $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_k$".

Contoh 3

Dalam ruang tunggu suatu apotik terdapat 4 kursi. Ahmad, Umar, Ali dan Said sedang berada di ruang tunggu apotik tersebut. Berapa banyak cara yang berbeda keempat anak itu menduduki kursi tersebut ?

Jawab:

Misalkan, 4 kotak berikut menampilkan 4 kursi dalam ruang tunggu.

- Kotak (kursi) *pertama* dapat diisi dengan 4 pilihan (cara), yaitu oleh siapa saja dari keempat anak.
- Kotak *kedua* dapat diisi dengan 3 pilihan (cara), yaitu oleh siapa saja dari ketiga anak yang tersisa.
- Kotak *ketiga* dapat diisi dengan 2 pilihan (cara), yaitu oleh siapa saja dari kedua anak yang tersisa.
- Kotak *keempat* dapat diisi dengan 1 pilihan (cara), yaitu oleh anak terakhir yang tersisa.

Dengan demikian banyaknya pilihan (cara) menyusun posisi duduk sebagai berikut.

4 pilihan	3 pilihan	2 pilihan	1 pilihan

Dengan menggunakan aturan perkalian, maka banyaknya cara yang berbeda keempat anak menduduki kursi tersebut adalah : $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ cara.

2. Aturan Penjumlahan

Sebelum kita membahas prinsip dasar aturan penjumlahan, perhatikan dua masalah berikut!

Masalah 2.1
Di dalam kotak pensil terdapat 5 pulpen dan 3 pensil, berapakah banyaknya cara memilih satu pulpen atau satu pensil?

Nah, masalah ini berbeda dengan masalah yang dibahas pada aturan perkalian, mengapa demikian? Bisakah kalian melihat perbedaannya?.
Pada masalah di aturan perkalian, misalnya pada pelambungan uang logam dan dadu, dua kejadian tersebut terjadi secara bersamaan, yaitu tampilnya satu sisi pada uang logam dan mata dadu.

Pada masalah 2.1 di atas, kejadiannya adalah pilihan antara mengambil satu pulpen atau satu pensil, bukan sekaligus mengambil satu pulpen dan satu pensil. Dengan demikian hal ini berbeda dengan masalah pada aturan perkalian.

Untuk masalah 2.1 dapat kita selesaikan sebagai berikut:
- Kejadian pertama (memilih satu pulpen) dapat terjadi dengan 5 cara.
- Kejadian kedua (memilih satu pensil) dapat terjadi dengan 3 cara.

Jadi, banyaknya cara memilih satu pulpen atau satu pensil adalah 5 + 3 = 8 cara.

Masalah di atas memberikan gambaran mengenai cara mencacah yang disebut **aturan penjumlahan**.

Secara khusus aturan penjumlahan berbunyi sebagai berikut.

"Jika kejadian pertama dapat terjadi dalam m cara dan kejadian kedua secara terpisah dapat terjadi dalam n cara, maka kejadian pertama atau kejadian kedua dapat terjadi dalam $(m + n)$ cara."

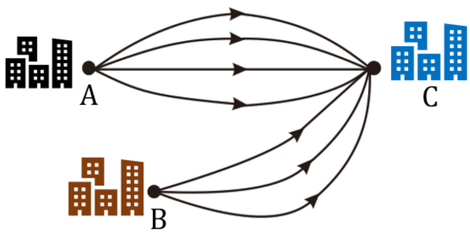
Contoh 4.

Ardi dan Nugroho di kota yang berbeda ingin menuju ke kota yang sama. Ardi berangkat dari kota A ke kota C dalam 4 cara, sedangkan Nugroho berangkat dari kota B ke kota C dalam 3 cara. Dalam berapa cara mereka bertemu di kota C?

Jawab:

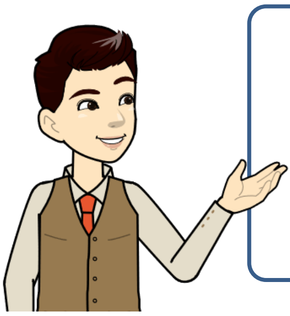
Permasalahan di atas dapat diselesaikan sebagai berikut.

- Ardi berangkat dari kota A ke kota C dapat memilih 4 jalan berbeda atau 4 cara.
- Nugroho berangkat dari kota B ke kota C dapat memilih 3 jalan berbeda atau 3 cara.



Jadi, banyak cara Ardi dan Nugroho dapat bertemu di kota C adalah 4 + 3 = 7 cara.

Aturan penjumlahan dapat diperluas sebagai berikut.



"Jika kejadian pertama dapat terjadi dalam n_1 cara, kejadian kedua secara terpisah dapat terjadi dalam n_2 cara, kejadian ketiga secara terpisah dapat terjadi dalam n_3 cara, dan seterusnya, dan kejadian ke-p secara terpisah dapat terjadi dalam n_p cara, maka kejadian pertama, atau kedua, atau ketiga, ... , atau kejadian ke-p dapat terjadi dalam $(n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_p)$ cara."

Contoh 5.

Di dalam kantong terdapat 10 kelereng berwarna merah, 7 kelereng berwarna hijau, 5 kelereng berwarna kuning, dan 3 kelereng berwarna biru. Berapakah banyaknya kemungkinan untuk mengambil satu kelereng berwarna merah atau hijau atau kuning atau biru?

Jawab:

Kejadian pertama (mengambil satu kelereng merah) dapat terjadi dengan 10 cara.
Kejadian kedua (mengambil satu kelereng hijau) dapat terjadi dengan 7 cara.
Kejadian kedua (mengambil satu kelereng kuning) dapat terjadi dengan 5 cara.
Kejadian kedua (mengambil satu kelereng biru) dapat terjadi dengan 3 cara.

Jadi banyaknya cara mengambil satu kelereng warna merah atau hijau atau kuning atau biru adalah 10 + 7 + 5 + 3 = 25 cara.

3. Definisi dan Notasi Faktorial

Definisi

Untuk suatu n bilangan asli, $n!$ (dibaca n faktorial) didefinisikan sebagai:

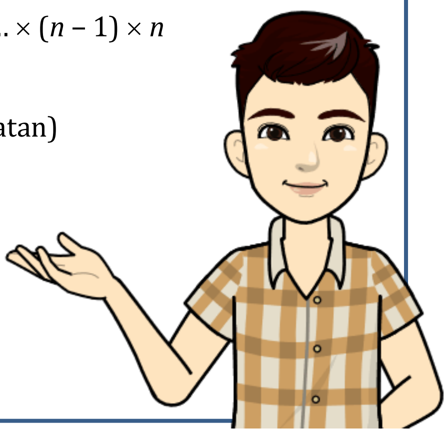
$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times (n - 1) \times n$$

Hal yang perlu diketahui:

$0! = 1$ (dari percobaan dan kesepakatan)
$1! = 1$ (dari kesepakatan)
$2! = 1 \times 2 = 2 \times 1! = 2$
$3! = 1 \times 2 \times 3 = 3 \times 2! = 6$
$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 4 \times 3! = 24$

Secara umum dapat ditulis:

$n! = n \times (n - 1)!$



Contoh 5.

Hitunglah:

a. $6!$
b. $\frac{5!}{2!}$
c. $4! \times 3!$
d. $\frac{8!}{7! + 6!}$

Jawab:

a. $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

b. $\frac{5!}{2!} = \frac{5\times4\times3\times2\times1}{2\times1} = \frac{120}{2} = 60$

c. $4! \times 3! = (4 \times 3 \times 2 \times 1) \times (3 \times 2 \times 1) = 24 \times 6 = 144$

d. $\frac{8!}{7! + 6!} = \frac{8\times7\times6!}{7\times6! + 1\times6!}$ (ubah 8! Dan 7! ke dalam bentuk 6!)

$= \frac{8\times7\times6!}{(7+1)6!} = \frac{8\times7}{8} = 7$ (faktorkan penyebut $7\times6! + 1\times6! = (7+1)6!$)

Contoh 6.

Nyatakan bentuk berikut dalam notasi faktorial

a. $4!\ (5\times 6)$
b. $8 \times 7 \times 6 \times 5$
c. $k(k-1)(k-2)$

Jawab:

a. $4!\ (5\times 6) = (4 \times 3 \times 2 \times 1) \times (5 \times 6) = 6!$

b. $8 \times 7 \times 6 \times 5 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times \frac{4\times3\times2\times1}{4\times3\times2\times1} = \frac{8!}{4!}$

c. $k(k-1)(k-2) = k(k-1)(k-2) \times \frac{(k-3)!}{(k-3)!} = \frac{k!}{(k-3)!}$

Contoh 7.

Sederhanakanlah penjumlahan pecahan $\frac{2}{7!} + \frac{5}{8!}$.

Jawab:

$\frac{2}{7!} + \frac{5}{8!} = \frac{2}{7!} \times \frac{8}{8} + \frac{5}{8!}$ (samakan penyebutnya, caranya $\frac{2}{7!} \times \frac{8}{8}$)

$= \frac{16}{8!} + \frac{5}{8!} = \frac{21}{8!}$ (jumlahkan pembilangnya)

C. Rangkuman

- Kaidah pencacahan merupakan aturan untuk menghitung banyaknya susunan obyek-obyek tanpa harus merinci semua kemungkinan susunannya.
- Aturan perkalian: Jika ada k kejadian (pilihan) dengan setiap kejadian (pilihan) memiliki hasil $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$ yang berbeda, maka banyak hasil berbeda yang mungkin dari k kejadian (pilihan) tersebut secara berurutan diberikan oleh hasil kali : $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_k$.
- Aturan penjumlahan: Jika kejadian pertama dapat terjadi dalam n_1 cara, kejadian kedua secara terpisah dapat terjadi dalam n_2 cara, kejadian ketiga secara terpisah dapat terjadi dalam n_3 cara, dan seterusnya, dan kejadian ke-p secara terpisah dapat terjadi dalam n_p cara, maka kejadian pertama, atau kedua, atau ketiga, ... , atau kejadian ke-p dapat terjadi dalam $(n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_p)$ cara.
- Untuk suatu n bilangan asli, $n!$ (dibaca n faktorial) didefinisikan sebagai $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-1) \times n$ dan $0! = 1$.

D. Latihan Soal

1. Akan disusun nomor telepon rumah yang terdiri atas 6 angka, dengan ketentuan angka pertama tidak boleh angka 0. Tentukan banyaknya nomor telepon yang dapat dibuat dari angka-angka 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, jika :
   a. angka-angka boleh berulang
   b. tidak boleh ada angka yang diulang
   c. hanya angka pertama yang tidak boleh diulang.
2. Dalam suatu kelas akan diadakan pemilihan pengurus kelas yang terdiri dari ketua kelas, sekretaris dan bendahara. Apabila calon ketua kelas ada 6 orang, calon sekretaris ada 4 orang, dan calon bendahara ada 3 orang, ada berapa susunan pengurus kelas yang mungkin terbentuk ?
3. Pada suatu konferensi yang dihadiri oleh 9 negara di Asia, bendera masing-masing negara dipasang berjajar pada halaman gedung. Berapa banyak urutan bendera berbeda yang dapat dipasang dari 9 bendera tersebut ?
4. Guru Matematika memberikan ulangan harian yang terdiri atas 10 pertanyaan pilihan ganda dengan 5 pilihan (mengandung 1 jawaban benar). Budi menjawab semua soal dengan cara menebak karena ia tidak belajar. Berapa banyak carakah Budi dapat menjawab soal ulangan harian tersebut ?
5. Sebuah plat nomor mobil di suatu daerah terdiri dari sebuah huruf, diikuti empat angka, dan diakhiri sebuah huruf, di mana angka 0 tidak boleh menempati posisi pertama.
   a. Ada berapakah plat nomor mobil yang dapat dibentuk?
   b. Jika disyaratkan tidak boleh ada huruf yang sama dan tidak ada angka yang sama, maka ada berapa plat nomor yang bisa dibuat?
6. Dari 100 siswa yang mengikuti lomba kecerdasan Bahasa Indonesia dan Matematika, 60 siswa lolos seleksi Bahasa Indonesia, 50 siswa lolos seleksi Matematika, dan 30 siswa lolos seleksi kedua bidang studi tersebut. Hitung banyak siswa yang:
   a. Hanya lolos matematika
   b. Tidak lolos keduanya
7. Dua dadu bermata enam yaitu 1, 2, 3, 4, 5, 6. Hitung:
   a. Banyaknya pasangan mata dadu yang berjumlah 10.
   b. Banyaknya pasangan mata dadu yang jumlahnya paling sedikit 9.
8. Hitunglah :
   a. $\frac{15!}{10!\times 6!}$ b. $\frac{1}{7!}-\frac{2}{8!}+\frac{3}{9!}$
9. Tentukan nilai n jika $n! = 56(n-2)!$
10. Buktikan bahwa : $\frac{k!(k-2)!}{(k-1)!(k-3)!} = k^2 - 2k$

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2
PERMUTASI

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 2 ini diharapkan Kalian dapat menjelaskan konsep permutasi, menganalisis permutasi melalui masalah kontekstual, serta mampu menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan permutasi.

B. Uraian Materi

Misalkan pada suatu lomba cerdas cermat yang diikuti oleh 3 regu (regu A, regu B, dan regu C) hanya menyediakan 2 macam hadiah saja yakni hadiah I dan hadiah II. Ada berapa kemungkinan pasangan pemenang hadiah-hadiah itu?

Berdasarkan jawaban di atas ternyata diperoleh bahwa terdapat 6 pasangan yang mungkin menjadi pemenang tebak tepat, yaitu (A, B), (A,C), (B, A), (B,C), (C, A), dan (C, B). Perhatikan bahwa (A, B)≠(B, A), (B, C)≠(C, B), dan seterusnya. (Mengapa?) Apa arti (A, B) dan (B, A)?

Untuk menjawab pertanyaan di atas ternyata urutan diperhatikan. Oleh karena itu, susunan yang demikian ini dinamakan dengan permutasi. Sekarang coba cari hubungan yang dapat diperoleh dari informasi pada masalah di atas bagaimana dapat menghasilkan 6 pasangan yang mungkin jadi pemenang.

Pengertian

"Diberikan sebanyak n unsur berbeda. Sebuah permutasi k unsur dari n unsur berbeda adalah sebuah jajaran dari k unsur yang urutannya diperhatikan."

Perhatikan huruf-huruf A, B, C, dan D.

- BDCA, DCBA, dan ACDB merupakan contoh permutasi-permutasi dari 4 huruf.
- BAD, ADB, dan BCA merupakan contoh permutasi-permutasi 3 huruf dari 4 huruf yang diketahui.
- AD, CB, DA, dan BD merupakan contoh permutasi-permutasi 2 huruf dari 4 huruf yang diketahui.

Coba tentukan permutasi 4 huruf, 3 huruf, dan 2 huruf lainnya dari huruf A, B, C, D.

1. Permutasi dengan Semua Unsur Berbeda

Banyaknya permutasi r unsur dari n yang berbeda diberi notasi P(n, r).

Teorema 1

Jika n dan r adalah dua bilangan bulat positif dan $r \leq n$, maka banyaknya permutasi r unsur dari n unsur berbeda tanpa pengulangan, diberi notasi P(n, r) adalah:

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Banyaknya permutasi n unsur dari n unsur berbeda adalah P(n, n) = n!

Contoh 1.

Tentukan banyaknya susunan 4 huruf berbeda yang dapat diperoleh dari kata MENTARI.

Jawab:

Kata MENTARI terdiri atas 7 huruf yang berbeda.
Banyaknya susunan 4 huruf berbeda yang dapat diperoleh dari 7 huruf berbeda tersebut merupakan permutasi r = 4 dari n = 7 huruf atau P(7, 4).
Jadi banyaknya susunan huruf yang dapat dibuat adalah

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$P(7, 4) = \frac{7!}{(7-4)!}$$

$$= \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3!}}$$

$$= 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$$

Ingat kembali definisi faktorial di KP 1,
7! = 7 × 6 × 5 × 4 × 3 × 2 × 1
atau 7! = 7 × 6 × 5 × 4 × 3!

Jadi, banyak susunan 4 huruf berbeda dari kata MENTARI adalah 840.

Contoh 2.

Dalam berapa cara, 6 buku pelajaran berbeda dapat disusun pada sebuah rak buku?

Jawab:

Banyaknya cara menyusun keenam buku pelajaran yang berbeda merupakan permutasi 6 unsur dari 6 unsur atau P(6, 6).
Dengan rumus P(n, n) = n! ,
diperoleh P(6, 6) = 6!
= 6 × 5 × 4 × 3 × 2 × 1
= 720

Jadi, banyaknya cara menyusun 6 buku pelajaran yang berbeda pada rak buku adalah 720 cara.

Permutasi dengan Pembatasan (Semua Unsur Berbeda)

Kadang-kadang kita menemukan pembatasan dalam pemilihan penyusunan unsur-unsur tertentu. Untuk masalah seperti ini, terlebih dahulu kita selesaikan pembatasannya, kemudian baru kita gunakan kaidah pencacahan.

Contoh 3.

Diketahui 5 mobil berbeda dan 4 motor berbeda yang sedang diparkir berbaris. Berapa banyak carakah barisan kendaraan ini dapat dibentuk dengan urutan kendaraan yang berbeda?

Tentukan juga banyak cara barisan berbeda dapat dibentuk jika :

a. dua motor harus ada di depan
b. satu mobil di depan dan satu motor di belakang.
c. mobil harus berkelompok
d. tidak boleh dua mobil berdekatan

Penyelesaian :

Jika mobil dan motor tidak dibedakan, maka terdapat 9 unsur berbeda (dari 5 mobil dan 4 motor). Jadi, Banyak cara membentuk barisan kendaraan dengan urutan yang berbeda adalah permutasi 9 unsur dari 9 unsur atau P(9, 9).

P(9, 9) = 9!

= $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

= 362.880 cara.

Berikutnya kita akan menentukan permutasi dari susunan mobil dan motor dengan beberapa pembatasan. Misalkan MT = motor dan MB = mobil.

a. Dua motor harus ada di depan

MT	MT							

- Dua kotak (tempat) pertama diisi dengan 2 motor yang dipilih dari 4 motor yang tersedia.

  Banyak cara memilih 2 motor dari 4 motor tersebut adalah P(4, 2)

$$P(4,2) = \frac{4!}{(4-2)!}$$

$$= \frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!}$$

= 4×3 = 12

- Sisa 7 kotak (tempat) lainnya, dapat diisi dengan 7 kendaraan yang tersisa. Ini adalah $P(7, 7) = 7!$

Dengan aturan perkalian, maka banyak cara dua motor harus ada di depan adalah

$12 \times 7! = 12 \times 5.040 = 60.480$

Jadi, banyak cara barisan berbeda dapat dibentuk jika dua motor harus ada di depan adalah 60.480 cara.

b. Satu mobil di depan dan satu motor di belakang

MB								MT

- Kotak pertama harus diisi mobil, dapat diisi dengan mobil mana saja dari 5 mobil yang ada, jadi kotak pertama dapat diisi dengan 5 cara.
- Kotak terakhir harus diisi motor, dapat diisi dengan motor mana saja dari 4 motor yang ada, berarti kotak terakhir dapat diisi dengan 4 cara.
- Sisa 7 kotak yang dapat diisi dengan 7 kendaraan yang tersisa, berarti $P(7, 7) = 7!$.

Dengan aturan perkalian, maka banyaknya cara menyusun agar satu mobil di depan dan satu motor di belakang adalah $5 \times 7! \times 4 = 20 \times 5.040 = 100.800$

Jadi, banyak cara barisan berbeda dapat dibentuk jika satu mobil di depan dan satu motor di belakang adalah 60.480 cara.

c. Mobil harus berkelompok

- Agar mobil (5 mobil) berkelompok, maka kita memblok dan menganggapnya sebagai satu unsur. Dalam blok ini, kelima mobil dapat dipertukarkan dalam $P(5, 5) = 5!$ cara.
- Kemudian blok mobil ini beserta 4 motor membentuk 5 unsur yang juga dapat dipertukarkan dalam $P(5, 5) = 5!$ cara.

Dengan menggunakan aturan perkalian, banyaknya cara menyusun agar mobil berkelompok adalah $5! \times 5! = 120 \times 120 = 14.400$.

Jadi, banyak cara barisan berbeda dapat dibentuk mobil harus berkempok adalah 14.400 cara.

d. Tidak boleh dua mobil berdekatan

Supaya mobil tidak berdekatan, maka posisi mobil dan motor haruslah berselang-seling seperti ilustrasi berikut.

MB	MT	MB	MT	MB	MT	MB	MT	MB

- Kelima posisi mobil dapat dipertukarkan dalam $P(5, 5) = 5!$ cara.
- Keempat posisi motor dapat dipertukarkan dalam $P(4, 4) = 4!$ cara.

Dengan menggunakan aturan perkalian, banyaknya cara menyusun agar tidak boleh dua mobil berdekatan adalah $5! \times 4! = 120 \times 24 = 2.880$

2. Permutasi dengan Beberapa Unsur yang Sama

Teorema 2

Banyaknya permutasi dari n unsur yang terdiri dari m_1 unsur jenis pertama sama, m_2 unsur jenis kedua sama, m_3 unsur jenis ketiga sama, ..., dan m_k unsur jenis ke–k sama ditentukan dengan

$$P = \frac{n!}{m_1!\ x\ m_2!\ x\, m_3!\ x\ \dots\ x\, m_k!}$$

dimana $m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_k = n$.

Contoh 4.

Berapa banyak permutasi dari huruf-huruf pada kata MATEMATIKA ?

Jawab:

Banyak huruf pada kata MATEMATIKA ada 10 buah. Terdapat unsur yang sama, yaitu:

- huruf M ada 2 buah,
- huruf A ada 3 buah,
- huruf T ada 2 buah.
- huruf E, I, dan K masing-masing 1 buah.

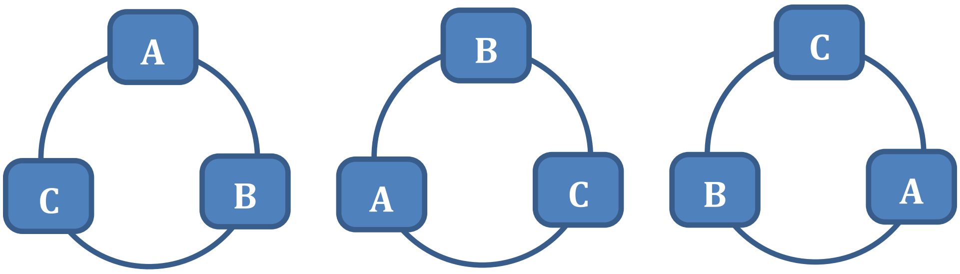
Maka banyaknya permutasi dari huruf-huruf tersebut adalah

$$P = \frac{10!}{2!\ x\ 3!\ x\ 2!\ x\ 1!\ x\ 1!\ x\ 1!} = \frac{10 \text{ x } 9 \text{ x } 8 \text{ x } 7 \text{ x } 6 \text{ x } 5 \text{ x } 4 \text{ x } 3!}{2\ x\ 3!\ x\ 2\ x\ 1\ x\ 1\ x\ 1} = 151.200.$$

3. Permutasi Siklik

Perhatikan bahwa permutasi yang kita bicarakan di atas adalah permutasi yang objek-objeknya dijajar atau disusun pada satu garis. Permutasi demikian ini dinamakan permutasi linear. Namun, jika objek-objek tersebut dijajar/disusun melingkar (pada suatu lingkaran) dan arah melingkarnya diperhatikan, misalnya searah putaran jarum jam, maka permutasi yang demikian dinamakan permutasi siklik.

Coba kalian perhatikan gambar berikut.



Tiga objek A, B, dan C di atas disusun secara melingkar. Walaupun nampak berbeda, namun jika dilihat dari urutan (searah jarum jam misalnya) maka ketiga susunan ini adalah sama.

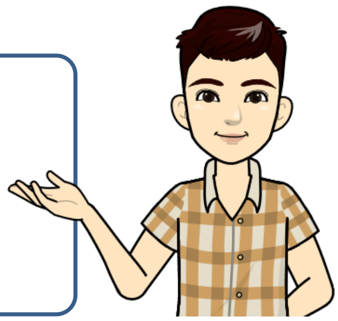
Jadi, dari tiga buah permutasi linear ABC, BCA, dan CAB diperoleh hanya satu permutasi siklik (ABC). Demikian juga untuk tiga permutasi linear ACB, CBA, dan BAC diperoleh hanya satu permutasi siklik (ACB). Dengan demikian terdapat dua permutasi-3 siklik dari tiga objek A, B, dan C, yaitu (ABC) dan (ACB).

Selanjutnya secara umum, jika pengulangan tidak diperkenankan, hubungan antara banyaknya permutasi siklik dan banyaknya permutasi linear dinyatakan dalam teorema berikut.

Definisi Permutasi Siklik

Banyaknya permutasi untuk n unsur berbeda yang diatur dalam sebuah lingkaran disebut permutasi siklik. Permutasi siklik dari n unsur ($n > 1$) ditentukan oleh rumus:

$$P_s(n) = (n - 1)!$$



Contoh 5.

6 orang manager perusahaan duduk mengelilingi sebuah meja berbentuk melingkar untuk mengadakan rapat. Berapa banyak cara mereka dapat duduk mengelilingi meja rapat tersebut dengan urutan yang berbeda?

Jawab:

Banyaknya cara agar 6 orang manager dapat duduk mengelilingi meja rapat sama dengan permutasi melingkar dari 6 unsur, yaitu

$Ps\,(6) = (6 - 1)! = 5!$

$= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

Jadi, banyak cara 6 orang manager perusahaan dapat duduk mengelilingi meja rapat tersebut dengan urutan yang berbeda adalah 120 cara.

Contoh 6.

Satu keluarga terdiri dari ayah, ibu, dan 4 orang anaknya. Mereka duduk di meja makan yang bentuknya melingkar. Ada berapa cara anggota keluarga tersebut duduk mengelilingi meja jika ayah dan ibu selalu duduk berdampingan?

Jawab:

- Syarat khusus, ayah dan ibu selalu duduk berdampingan. Posisinya dapat dipertukarkan sebanyak 2! = 2 cara.
- Ayah dan ibu selalu duduk berdampingan, sehingga posisi ini diblok dan dianggap 1 unsur. Blok (ayah dan ibu) dan 4 orang anaknya menjadi 5 unsur yang duduk melingkar, sehingga dengan permutasi siklik diperoleh:

$P_s(5) = (5 - 1)! = 4!$

$= 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

Dengan Aturan perkalian diperoleh banyak cara anggota keluarga duduk mengelilingi meja jika ayah dan ibu selalu duduk berdampingan adalah $2 \times 24 = 48$ cara.

C. Rangkuman

- Permutasi k unsur dari n unsur berbeda adalah sebuah jajaran dari k unsur yang urutannya diperhatikan.
- Jika n dan r adalah dua bilangan bulat positif dan $r \leq n$, maka banyaknya permutasi r unsur dari n unsur berbeda tanpa pengulangan, diberi notasi P(n, r) adalah:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

- Banyaknya permutasi n unsur dari n unsur berbeda adalah P(n, n) = n!.
- Banyaknya permutasi dari n unsur yang terdiri dari m_1 unsur jenis pertama sama, m_2 unsur jenis kedua sama, m_3 unsur jenis ketiga sama, …, dan m_k unsur jenis ke–k sama ditentukan dengan

$$P = \frac{n!}{m_1!\ x\ m_2!\ x\, m_3!\ x\ \dots\ x\, m_k!}$$

dimana $m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_k = n$.

- Banyaknya permutasi untuk n unsur berbeda yang diatur dalam sebuah lingkaran disebut permutasi siklik. Permutasi siklik dari n unsur ($n > 1$) ditentukan oleh rumus $P_s(n) = (n - 1)!$

D. Latihan Soal

1. Seorang kandidat presiden hanya dapat mengunjungi enam provinsi dari sepuluh provinsi yang ingin dikunjunginya. Berapa banyak cara dengan urutan berbeda, ia dapat mengunjungi provinsi-provinsi itu?
2. Bilangan terdiri dari 4 angka disusun dari angka-angka 1, 2, 3, 5, 6, dan 7. Hitung banyak susunan bilangan dengan angka-angka yang berlainan (angka-angkanya tidak boleh berulang).
3. Pada suatu pameran karya seni, lukisan-lukisan ditempatkan pada satu baris. Dengan berapa cara penempatan lukisan dapat dilakukan jika ada 10 lukisan yang dipamerkan?
4. Terdapat 4 buku matematika, 3 buku fisika, dan 5 buku kimia yang berbeda akan disusun ke dalam rak yang dapat memuat semua buku. Berapa susunan yang mungkin jika:
   a. buku yang sejenis saling berdampingan
   b. buku-buku fisika saja yang saling berdampingan
5. Berapa banyak permutasi dari huruf-huruf pada kata STATISTIKA?
6. Pada suatu ruas jalan dipasang lampu hias yang terdiri dari 3 bohlam kuning, 6 bohlam merah, dan 4 bohlam hijau. Tentukan banyaknya cara memasang lampu hias tersebut jika bohlam berwarna sama tidak dapat dibedakan?
7. Tujuh orang duduk mengelilingi meja bundar. Berapa banyaknya susunan duduk yang berbeda dari ketujuh orang itu?
8. Dengan berapa cara 5 anak laki-laki dan 3 anak perempuan dapat disusun pada suatu lingkaran jika anak perempuan selalu berdekatan (berkumpul)?

KEGIATAN PEMBELAJARAN 3
KOMBINASI

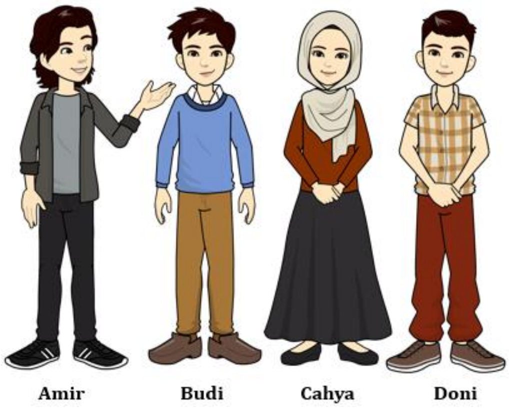
A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 3 ini diharapkan Kalian dapat menjelaskan konsep kombinasi, menganalisis kombinasi melalui masalah kontekstual, serta mampu menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan kombinasi.

B. Uraian Materi

1. Kombinasi

Misalkan dari 4 bersaudara Amir (A), Budi (B), Cahya (C), dan Doni (D) diundang 2 orang wakilnya untuk rapat keluarga. Ada berapa cara undangan itu dapat dipenuhi? Bagaimana pula jika yang diundang adalah 3 orang dari 4 bersaudara itu?



Dari permasalahan di atas diperoleh bahwa objek eksperimennya adalah O = {A, B, C, D} sedangkan eksperimennya adalah mengundang hadir dalam rapat keluarga sebanyak 2 orang wakilnya.

Jika rapat keluarga itu yang diundang 2 orang, maka apakah arti dari (A, B) dan (B, A)? Apakah (A, B) = (B, A)?
Demikian juga, jika rapat keluarga itu yang diundang 3 orang, maka apakah arti dari (C, A, D) dan (A, C, D)? Apakah (C, A, D) = (A, C, D)?

Nah, ternyata untuk permasalahan di atas, (A, B) = (B, A), karena jika yang hadir Amir dan Budi, tentunya sama saja jika yang hadir Budi dan Amir. Demikian juga (C, A, D) = (A, C, D).

Untuk menjawab pertanyaan di atas ternyata urutan tidak diperhatikan. Susunan yang demikian ini dinamakan dengan kombinasi. Sekarang coba cari hubungan yang dapat diperoleh dari informasi pada masalah di atas, jika rapat keluarga itu yang diundang 2 orang, maka banyaknya pasangan anggota keluarga yang mungkin ikut rapat ada 6.

Pengertian

"Diberikan sebanyak *n* unsur berbeda. Sebuah kombinasi *k* unsur dari *n* unsur berbeda adalah sebuah jajaran dari *k* unsur yang urutannya tidak diperhatikan."

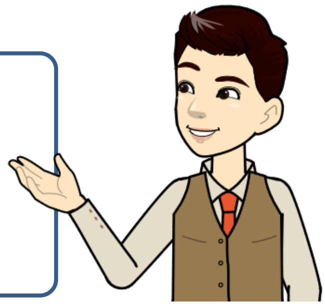
Untuk lebih memahami pengertian ini, perhatikan huruf-huruf A, B, C, dan D.

a. ABC, ABD, ACD, dan BCD merupakan kombinasi 3 huruf dari 4 huruf yang diketahui tanpa pengulangan.
b. AAB, ABB, ACC, dan BDD merupakan kombinasi-3 huruf dari 4 huruf yang diketahui dengan pengulangan. (Coba cari kombinasi lainnya selain 4 kombinasi tersebut!)
c. AD, CB, AB, dan BD merupakan kombinasi-kombinasi-2 huruf dari 4 huruf yang diketahui. (Coba cari kombinasi lainnya selain 4 kombinasi tersebut!)

Teorema

Misalkan n dan k bilangan bulat non negatif dengan $k \leq n$. Banyaknya kombinasi k unsur dari n unsur berbeda *tanpa pengulangan* ditentukan dengan rumus:

$$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$



Contoh 1.

Dalam suatu ujian, setiap siswa diharuskan menjawab 4 soal dari 7 soal yang disediakan. Jika seorang siswa memilih secara acak soal yang akan dikerjakannya, berapa banyak cara atau pilihan untuk mengerjakan soal ujian tersebut ?

Jawab:

Dalam kasus di atas, urutan nomor-nomor soal diabaikan. Sehingga banyaknya cara untuk menngerjakan 4 soal dari 7 soal ujian adalah kombinasi 4 soal dari 7 soal, sehingga diperoleh:

$$C(7,\ 4) = \frac{7!}{4!\,(7-4)!} = \frac{7!}{4!\,.3!}$$

$$= \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!\,.3 \times 2 \times 1} = 35$$

Jadi, banyak cara untuk mengerjakan soal ujian tersebut adalah 35 cara.

Contoh 2.

Sebuah kontingen Olimpiade Matematika yang terdiri atas 5 siswa akan dipilih dari 6 siswa putra dan 4 siswa putri. Tentukan banyak cara kontingen ini dapat dibentuk jika:

a. tidak ada pembatasan (tidak dibedakan antara putra dan putri)
b. kontingen memiliki tepat 2 siswa putra
c. kontingen memiliki paling sedikit 1 siswa putri

Jawab *:*

Masalah ini termasuk masalah kombinasi, karena urutan pemilihan siswa tidak diperhatikan (tidak dipentingkan).

a. tidak ada pembatasan
Jumlah siswa tanpa membedakan putra dan putri adalah 6 + 4 = 10. dari 10 siswa tersebut akan dipilih 5 siswa, sehingga banyak cara membentuk kontingen adalah

$$C(10,\ 5) = \frac{10!}{5!(10-5)!} = \frac{10!}{5!.5!}$$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!\,.5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 252 \text{ cara.}$$

b. kontingen memiliki tepat 2 siswa putra

2 siswa putra dapat dipilih dari 6 siswa putra, dengan banyaknya cara memilihnya adalah $C(6, 2)$.
Kontingen terdiri dari 5 siswa, berarti masih tersedia 3 tempat yang harus diisi oleh siswa putri. Banyaknya cara memilih 3 siswa putri dari 4 siswa putri adalah $C(4, 3)$.
Dengan aturan perkalian, banyaknya cara membentuk kontingen yang memiliki tepat 2 siswa putra adalah

$$C(6,2)\times C(4,3)=\frac{6!}{2!\,(6-2)!}\times\frac{4!}{3!\,(4-3)!}$$
$$=\frac{6!}{2!.4!}\times\frac{4!}{3!.1!}$$
$$=\frac{6\times5\times4!}{2\times1\times4!}\times\frac{4\times3!}{3!\times1}=15\times4\ =\ 60\text{ cara.}$$

c. kontingen memiliki paling sedikit 1 siswa putri

Banyaknya cara membentuk kontingen yang terdiri atas 5 siswa dengan semuanya putra adalah $C(6, 5)$

$$C(6,\ 5)=\frac{6!}{5!(6-5)!}$$
$$=\frac{6!}{5!\,(6-5)!}=\frac{10!}{5!\,.1!}$$
$$=\frac{6\times5!}{5!\,.1}=6\text{ cara.}$$

Banyaknya cara membentuk kontingen adalah $C(10, 5)$.

Jadi, banyaknya cara membentuk kontingen yang memiliki paling sedikit 1 siswa putri adalah

$$C(10, 5) - C(6, 5) = 252 - 6 = 246 \text{ cara}$$

2. Ekspansi Binomial

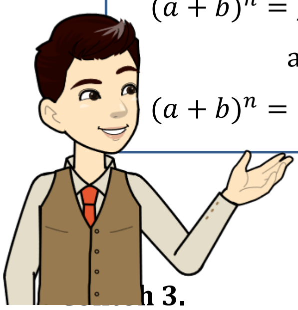
Penjabaran Binomial Newton berbentuk $(a + b)^n$, koefisien variabelnya dapat bersandarkan pada Segitiga Pascal atau konsep kombinasi.

Teorema Binomial

$$(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}C(n,\ r)\,a^{n-r}.b^r,$$

atau dijabarkan:

$$(a+b)^n=C(n,0).a^n+C(n,1).a^{n-1}b^1+C(n,2).a^{n-2}b^2+\ldots+C(n,n).b^n$$



Contoh 3.

Tentukan ekspansi dari $(2x + y^2)^5$.

Jawab:

$(2x + y^2)^5 = C(5,0)(2x)^5 + C(5,1)(2x)^4(y^2)^1 + C(5,2)(2x)^3(y^2)^2 + C(5,3)(2x)^2(y^2)^3$

$+ C(5,4)(2x)^1(y^2)^4 + C(5,5)(y^2)^5$

$= 1(32x^5) + 5(16x^4)(y^2) + 10(8x^3)(y^4) + 10(4x^2)(y^6) + 5(2x)(y^8) + 1(y^{10})$

$= 32x^5 + 80x^4y^2 + 80x^3y^4 + 40x^2y^6 + 10xy^8 + y^{10}$

Contoh 4.

Tentukan suku ketujuh dari ekspansi $(4x - y^3)^9$.

Jawab:

Bentuk umum ekspansi binomial $(a + b)^n$ terlebih dahulu diidentikkan dengan ekspansi binomial yang diketahui di soal untuk menentukan nilai-nilai a, b, dan n.

$(a + b)^n \equiv (4x - y^3)^9$, diperoleh $a = 4x$, $b = -y^3$ dan $n = 9$

Ditanyakan suku ketujuh, berarti $r = 7 - 1 = 6$,

Jadi, suku ketujuh : $C(n,\ r)\ a^{n-r}\ b^r = C(9,\ 6)\ (4x)^{9-6}\ (-y^3)^6$

$= \frac{9!}{6!.3!}\ (4x)^3\ (-y^3)^6$

$= 84.\ (64x^3)\ (y^{18}) = 5.376.x^3\ y^{18}$

C. Rangkuman

- Kombinasi k unsur dari n unsur berbeda adalah sebuah jajaran dari k unsur yang urutannya tidak diperhatikan.
- Misalkan n dan k bilangan bulat non negatif dengan $k \leq n$. Banyaknya kombinasi k unsur dari n unsur berbeda *tanpa pengulangan* ditentukan dengan rumus:
  $C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- Ekspansi Binomial
  $(a + b)^n = \sum_{r=0}^{n} C(n,\ r)\ a^{n-r}.\, b^r$,

  atau dijabarkan:

  $(a + b)^n = C(n,0).\, a^n + C(n,1).\, a^{n-1}b^1 + C(n,2).\, a^{n-2}b^2 + \ldots + C(n,n).\, b^n$

D. Latihan Soal

1. Berapa banyak segitiga yang berbeda yang dapat dibentuk dengan menghubungkan diagonal-diagonal segi-10?
2. Seorang siswa diminta mengerjakan 7 soal dari 10 soal yang tersedia, dengan syarat nomor 1 sampai dengan nomor 5 harus dikerjakan. Berapa banyak pilihan yang dapat diambil oleh siswa tersebut?
3. Suatu tim bulu tangkis beranggotakan 5 pemain putra dan 3 pemain putri. Tentukanlah banyaknya tim:
   a. ganda putra yang dapat disusun.
   b. ganda campuran yang dapat disusun.

4. Pengurus inti kelas yang terdiri dari 4 siswa putra dan 3 siswa putri akan dipilih dari 7 siswa putra dan 5 siswa putri. Berapa banyak pilihan berbeda untuk membentuk pengurus inti kelas tersebut?
5. Sebuah kotak berisi 5 bola merah, 4 bola putih, dan 3 bola biru. Tiga bola diambil dari kotak tersebut.
   a. berapa banyak cara terambil 3 bola berwarna sama?
   b. berapa banyak cara terambil 1 bola putih dan 2 bola merah ?
6. Seorang ahli kimia memiliki 9 contoh larutan. Terdapat 4 jenis larutan A dan 5 jenis larutan B. Jika ahli kimia tersebut memilih tiga larutan secara acak, berapa cara ahli kimia tersebut akan mengambil lebih dari satu jenis larutan A?
7. Tentukan ekspansi dari $(2x - y^2)^6$.
8. Tentukan suku kelima dari ekspansi $(x + 2y)^{10}$.