KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
Limit Fungsi Trigonometri 1

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini diharapkan dapat Menjelaskan arti limit fungsi trigonometri di suatu titik; Menghitung limit fungsi trigonometri di suatu titik dan Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan limit fungsi trigonometri

B. Uraian Materi

Pada pelajaran matematika wajib kelas XI, Ananda telah belajar mengenai definisi limit fungsi aljabar yaitu bahwa suatu limit fungsi f(x) dikatakan mendekati a {f(x), a} sebagai suatu limit. Bila x mendekati a, dinotasikan limit F(x) = L. Cara menyelesaikan limit fungsi aljabar, terdapat 3 cara untuk menyelesaikan limit fungsi aljabar yaitu dengan metode (1) substitusi langsung; (2) pemfaktoran; (3) merasionalkan penyebut. Nahhh semoga Ananda masih mengingat ini yaa...

Pada kegiatan pembelajaran ini Ananda akan belajar bagaimana menyelesaikan limit fungsi trigonometri. Cara menyelesaikan limit fungsi trigonometri dibagi menjadi 4 metode, yaitu (1) dengan metode substitusi langsung; (2) dengan menggunakan rumus dasar limit fungsi trigonometri; (3) dengan metode pemfaktoran; (4) dengan cara menyederhanakan fungsi trigonometrinya. Sebagai materi prasyarat pada bahasan limit fungsi trigonometri selain Ananda harus hapal nilai-nilai sudut istimewa untuk sin, cos, tan dan kebalikannya juga harus hapal rumus-rumus trigonometrinya ya. Jadi Ananda boleh sambil buka buku atau catatan kelas X tentang rumus-rumus trigonometri dan kelas XI tentang limit fungsi aljabar. Okay, sekarang kita lihat satu per satu cara menyelesaikan limit fungsi trigonometri..

1. Metode substitusi langsung

Penerapan metode substitusi langsung dalam menentukan atau menyelesaikan limit fungsi trigonometri sangat mudah, yakni dengan langsung mengganti x dengan angka yang tertera di soal atau

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Perhatikan contoh soal berikut:
Gunakan metode substitusi untuk menentukan nilai Limit fungsi trigonometri berikut ini:

1. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \sin 2x = \sin 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{2\pi}{4} = \sin 90^0 = 1$
2. $\lim\limits_{x \to \frac{3\pi}{4}} \tan 3x + 2 = \tan 3\left(\frac{3\pi}{4}\right) + 2 = \tan(45^0) + 2 = 1 + 2 = 3$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} = \frac{\sin 0}{\sin 0 + \cos 0} = \frac{0}{0+1} = 0$
4. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2x}{2\cos 2x} = \frac{1-\cos 2(\frac{\pi}{2})}{2\cos 2(\frac{\pi}{2})} = \frac{1-\cos\pi}{2\cos\pi} = \frac{1-(-1)}{2\,(-1)} = \frac{1+1}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$

Berikut disajikan tabel sudut istimewa yaa biar Ananda gak ribet lagi nihhh.. tapi nanti harus dihapalkan.

	0°	30°	45°	60°	90°
Sinα	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$
	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	**1**
Cosα	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$
	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	**0**
Tgα	$\frac{0}{1}$	$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}$	$\frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}}$	$\frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{0}$
	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	**1**	$\sqrt{3}$	**Tdk terdefinisi**

2. Menggunakan rumus dasar limit fungsi trigonometri

Rumus dasar limit fungsi trigonometri tersebut adalah:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}=\frac{a}{b}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ax}{\sin bx}=\frac{a}{b}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan ax}{bx}=\frac{a}{b}$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ax}{\tan bx}=\frac{a}{b}$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan ax}{\tan bx}=\frac{a}{b}$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}=\frac{a}{b}$
7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan ax}{\sin bx}=\frac{a}{b}$
8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\tan bx}=\frac{a}{b}$

Perhatikan dengan seksama dan teliti rumus dasar di atas, jika Ananda jeli Ananda akan menemukan pola jawaban rumus tersebut. Sebagai penguat kita simak contoh soal di bawah ini yaa.

Dengan menggunakan rumus limit fungsi trigonometri di atas, tentukan nilai limit fungsi trigonometri berikut:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\ 2x}{3x}=\frac{2}{3}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 3x}=\frac{2}{3}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 5x}{3x}=\frac{5}{3}$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{\tan 6x}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\tan 5x}=\frac{2}{5}$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 5x-\tan 3x}{3x}=\cdots$ *dengan menggunakan sifat dari limit fungsi aljabar yang telah Ananda pelajari di kelas XI, maka soal ini dapat kita pecah menjadi*

$$\lim_{x\to 0}\frac{tan5x}{3x}-\lim_{x\to 0}\frac{tan3x}{3x}=\frac{5}{3}-\frac{3}{3}=\frac{2}{3}$$

Dari keenam contoh soal yang diberikan, ternyata untuk menjawabnya Ananda tinggal menuliskan angka yang tertera di soal aja yaa... Gimana mudah bukan...? Yakin deh 100% Ananda dapat mengikutinya sehingga kita lanjut ke tingkatan berikutnya. Yukk kita simak lagi contoh soal berikutnya.
Tentukan nilai limit fungsi trigonometri berikut ini:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin 5x}{3x\tan 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{3x}\,.\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\tan 2x}=\frac{1}{3}\,.\frac{5}{2}=\frac{5}{6}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\,sin^2 2x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x.\sin 2x}{3.x.x}$$
$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}\,.\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\frac{2}{3}\,.\frac{2}{1}\,.\frac{2}{1}=\frac{8}{3}$$

C. Rangkuman

Cara menyelesaikan limit fungsi trigonometri pada pembelajaran pertama ini dilakukan dengan dua cara yaitu cara substitusi dan pemfaktoran.

1. $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$
2. $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{(x-a)f(a)}{(x-a\,)g(a)}$

D. Latihan Soal

Isilah soal dibawah ini dengan benar

1. Nilai dari $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 6x}=\cdots$

2. Nilai dari $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 7x+\tan 3x-\sin 5x}{\tan 9x-\tan 3x-\sin x}=\cdots$

3. Nilai dari $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$ adalah ...

4. $\lim_{x\to 0}\frac{sin^3 2x}{tan^3\frac{1}{2}x}=\cdots$

5. Nilai dari $\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+x}{\sin x}=\cdots$

6. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\sin 3x}{\sin 2x\tan 3x}=\cdots$

7. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{a}{b}x}{\tan cx}=\cdots$

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2
Limit Fungsi Trigonometri 2

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini diharapkan dapat menghitung limit fungsi trigonometri di suatu titik dengan menggunakan rumus dasar trigonometri dan menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan limit fungsi trigonometri

B. Uraian Materi

Pada pembelajaran kali ini, Ananda akan belajar bagaimana cara menghitung limit fungsi trigonometri. Cara menghitungnya kita akan gunakan rumus dasar trigonometri dan penyederhanaan rumus-rumusnya.

1) Menggunakan metode pemfaktoran

Untuk metode pemfaktoran konsepnya sama persis dengan metode pemfaktoran dalam limit fungsi aljabar yang telah Ananda pelajari di kelas XI. Metode pemfaktoran dilakukan ketika Ananda menemukan jawaban dengan bentuk tak tentu atau $\frac{0}{0}$, nahh artinya di sini Ananda harus melakukan pemfaktoran. Trik metode pemfaktoran adalah Ananda harus membuang si pembuat nol dalam fungsi tersebut. Sebagai contoh, perhatikan soal di bawah ini.

Tentukan nilai limit berikut:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x^2+2x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x(x+2)} = \left[\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\right].\left[\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{(x+2)}\right] = \frac{1}{1}\,.\frac{1}{0+2} = 1.\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

   faktorkan

2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)(2x+3)}{x^2+4x-5} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)(2x+3)}{(x-1)(x+5)} = \left[\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{(x-1)}\right].\left[\lim\limits_{x\to 1}\frac{(2x+3)}{(x+5)}\right] =$
   $1\,.\frac{2(1)+3}{(1+5)} = \frac{5}{6}$

   Sifat-sifat limit

$$\lim_{x\to 1}\frac{\tan(x-1)\sin(1-\sqrt{x})}{x^2-2x+1}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\tan(x-1)\sin(1-\sqrt{x})}{(x-1)(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\tan(x-1)}{(x-1)}.\lim_{x\to 1}\frac{\sin(1-\sqrt{x})}{(x-1)}$$

$$= 1.\lim_{x\to 1}\frac{\sin(1-\sqrt{x})}{-(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}$$

$$= -1.\lim_{x\to 1}\frac{\sin(1-\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})}\,.\lim_{x\to 1}\frac{1}{(1+\sqrt{x})} = -1\,.1.\frac{1}{1+\sqrt{1}} = -1.1.\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

2) Menyederhanakan Fungsi Trigonometrinya

Untuk dapat mengerjakan soal limit fungsi trigonometri seperti ini, mengharuskan Ananda buka kembali rumus-rumus trigonometrinya. Agar lebih efektif yuk simak contoh soalnya.

Tentukan nilai limit fungsi berikut ini:

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{2x \sin x} =$

Jika Ananda mensubstitusi x dengan 0 maka akan didapat bentuk tak tentu atau $\frac{0}{0}$. Dalam hal ini Ananda harus merubah cos x menjadi fungsi lain.

Ingat Kembali rumus:
$\cos 2x = cos^2 x - sin^2 x$
$\cos x = cos^2 \frac{1}{2}x - sin^2 \frac{1}{2}x$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{2x \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{1-(cos^2 \frac{1}{2}x - sin^2 \frac{1}{2}x)}{2x \sin x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(1-cos^2 \frac{1}{2}x) + sin^2 \frac{1}{2}x}{2x \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{sin^2 \frac{1}{2}x + sin^2 \frac{1}{2}x}{2x \sin x}$$

Ingat Kembali rumus:
$cos^2 x + sin^2 x = 1$
Maka $sin^2 x = 1 - cos^2 x$
$sin^2 \frac{1}{2}x = 1 - cos^2 \frac{1}{2}x$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2sin^2 \frac{1}{2}x}{2x \sin x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2sin \frac{1}{2}x . sin \frac{1}{2}x}{2x \sin x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2\ sin \frac{1}{2}x}{2x} . \lim_{x \to 0} \frac{sin \frac{1}{2}x}{sinx} = \frac{2.\frac{1}{2}}{2} . \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{4}$$

2. $$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{cos^2 x - sin^2 x}{\cos x - \sin x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{(\cos x - \sin x)} =$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \cos x + \sin x = cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

Bagaimana dengan contoh soal tersebut? Ananda sudah mulai paham kan cara mengerjakannya? Agar lebih matang, Ananda kembali ingat rumus-rumus trigonometrinya yaa... nihhh di bawah ini disajikan beberapa rumus trigonometri untuk Ananda.

Berikut ini merupakan kumpulan rumus dasar trigonometri. Ananda tinggal menyesuaikan sudut yang diminta dari soal yang diberikan seperti contoh soal di atas.

Identitas Trigonometri

1. $sin^2 x + cos^2 x = 1$
2. $sin^2 x = 1 - cos^2 x$
3. $cos^2 x = 1 - sin^2 x$
4. $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
5. $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$
6. $\sec x = \frac{1}{\cos x}$
7. $\csc x = \frac{1}{\sin x}$
8. $sec^2 = tan^2 x + 1$
9. $csc^2 x = cot^2 x + 1$

Rumus Trigonometri

1. $\sin(\alpha+\beta) = sin\alpha\ cos\beta + cos\alpha\ sin\beta$
2. $\sin(\alpha-\beta) = sin\alpha\ cos\beta - cos\alpha\ sin\beta$
3. $\cos(\alpha+\beta) = cos\alpha\ cos\beta - sin\alpha\ sin\beta$
4. $\cos(\alpha-\beta) = cos\alpha\ cos\beta + sin\alpha\ sin\beta$
5. $\tan(\alpha+\beta) = \frac{tan\alpha + tan\beta}{1 - tan\alpha\ tan\beta}$
6. $\tan(\alpha-\beta) = \frac{tan\alpha + tan\beta}{1 + tan\alpha\ tan\beta}$
7. $sin2\alpha = 2\ sin\ \alpha \cos\alpha$
8. $\cos 2\ \alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
   $\cos 2\ \alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
   $\cos 2\ \alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$
9. $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-tan^2\alpha}$
10. $sin^2\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\alpha$
11. $cos^2\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\alpha$
12. $sin3\alpha = 3\ sin\ \alpha - 4\sin^3\alpha$
13. $cos\ 3\alpha = 4\ cos^3\alpha - 3\cos\alpha$
14. $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$
15. $2\cos\alpha\ \sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$
16. $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$
17. $-2\sin\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)$
18. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\ cos\frac{1}{2}\ (\alpha-\beta)$
19. $\sin\alpha - \sin\beta = 2cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\ \sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$
20. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\ cos\frac{1}{2}\ (\alpha-\beta)$
21. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\ sin\frac{1}{2}\ (\alpha-\beta)$

C. Rangkuman

Pada pembelajaran ini Ananda diharapkan dapat mengingat rumus-rumus trigonometri di bawah ini agar ketika menyelesaikan limit fungsi trigonometri yang mengharuskan mengganti, atau menyederhanakan dengan rumus trigonometri, Ananda dapat lancar mengerjakannya.

Identitas Trigonometri

1. $sin^2x + cos^2x = 1$
2. $sin^2x = 1 - cos^2x$
3. $cos^2x = 1 - sin^2x$
4. $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
5. $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$
6. $\sec x = \frac{1}{\cos x}$
7. $\csc x = \frac{1}{\sin x}$
8. $sec^2 = tan^2x + 1$
9. $csc^2x = cot^2x + 1$

Rumus Trigonometri

1. $\sin(\alpha+\beta) = sin\alpha\ cos\beta + cos\alpha\ sin\beta$
2. $\sin(\alpha-\beta) = sin\alpha\ cos\beta - cos\alpha\ sin\beta$
3. $\cos(\alpha+\beta) = cos\alpha\ cos\beta - sin\alpha\ sin\beta$
4. $\cos(\alpha-\beta) = cos\alpha\ cos\beta + sin\alpha\ sin\beta$
5. $\tan(\alpha+\beta) = \frac{tan\alpha + tan\beta}{1 - tan\alpha\ tan\beta}$
6. $\tan(\alpha-\beta) = \frac{tan\alpha + tan\beta}{1 + tan\alpha\ tan\beta}$
7. $sin2\alpha = 2\ sin\ \alpha \cos\alpha$
8. $\cos 2\ \alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

   $\cos 2\ \alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

   $\cos 2\ \alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$
9. $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-tan^2\alpha}$
10. $sin^2\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\alpha$
11. $cos^2\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\alpha$
12. $sin3\alpha = 3\ sin\ \alpha - 4\sin^3\alpha$
13. $cos\ 3\alpha = 4\ cos^3\alpha - 3\cos\alpha$
14. $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$
15. $2\cos\alpha\ \sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$
16. $2c\ os\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$
17. $-2\sin\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)$
18. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\ cos\frac{1}{2}\ (\alpha-\beta)$
19. $\sin\alpha - \sin\beta = 2cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\ \sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$
20. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\ cos\frac{1}{2}\ (\alpha-\beta)$
21. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\ sin\frac{1}{2}\ (\alpha-\beta)$

D. Latihan Soal

Kerjakan soal untuk mengukur kemampuan pemahaman konsep Ananda terhadap materi limit fungsi trigonometri berikut ini:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{x^2-4} = \cdots$
2. Nilai dari $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} = \cdots$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\tan\frac{1}{2}x} = \cdots$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(3x-\pi)\cos 2x}{\sin(3x-\pi)} = \cdots$
5. Nilai dari $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\tan(x-1)\sin(1-\sqrt{x})}{x^2-2x+1} = \cdots$