KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
INTEGRAL TAK TENTU FUNGSI ALJABAR

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini diharapkan kalian dapat menentukan integral tak tentu fungsi aljabar.

B. Uraian Materi

Sumber: *www.en.wikipedia.org*

Leibniz

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716) adalah seorang ilmuwan, filsuf, matematikawan, diplomat, pustakawan, dan pengacara berkebangsaan Jerman keturunan Sorb.

Menurut catatannya, terobosan sangat penting terjadi pada 11 November 1675 ketika ia mendemonstrasikan kalkulus integral pertama kalinya untuk menghitung luas daerah di bawah fungsi y = x.

Ia memper kenalkan beberapa notasi dalam kalkulus yang tetap digunakan sampai sekarang

Integral Fungsi

Setiap hari tentu saja kita sering melakukan aktivitas yang saling berkebalikan, seperti naik dan turun, maju dan mundur, menghirup udara dan menghembuskan udara, dan lain sebagainya. Begitu pula dalam matematika kita mengenal operasi yang saling berkebalikan atau saling invers seperti pengurangan dengan penjumlahan, pembagian dengan perkalian, pemangkatan dengan penarikan akar dan sebagainya. Nahh kalian pernah mempelajari turunan dari sebuah fungsi, lalu operasi apakah yang merupakan kebalikan atau invers dari turunan?

Kalian tentu masih ingat bahwa turunan dari sebuah fungsi $f(x)$ kita tulis $f'(x)$. Nah seandainya diketahui sebuah fungsi $f(x)$ adalah turunan dari sebuah fungsi $F(x)$, bagaimana kita dapat menentukan fungsi $F(x)$?

1. Integral sebagai Anti Turunan

Jika $F'(x) = f(x)$ maka $F(x)$ adalah anti turunan/anti derivatif dari $f(x)$

Jika $y = F(x)$ maka $\frac{dy}{dx} = F'(x)$

$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f(x)$

$\Leftrightarrow dy = f(x)dx$

$\Leftrightarrow \int dy = \int f(x)dx$

$\Leftrightarrow y = \int f(x)dx$

Jika $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ maka $\int f(x)dx = F(x) + C$ untuk setiap bilangan real C

Proses mendapatkan $\frac{dy}{dx}$ dari y (suatu fungsi x) disebut diferensial, sedangkan proses mendapatkan y dari $\frac{dy}{dx}$ disebut **Integral**

Lambang $\int$ adalah simbol integral, $f(x)$ yaitu fungsi di samping simbol integral disebut **integran**, dan $\int f(x)dx$ disebut **integral tak tentu** dan dibaca **integral dari $f(x)$ terhadap x.**

Jadi dari persamaan $\int f(x)dx = F(x) + C$, turunan dari ruas kanan adalah integran di ruas kiri.

Berikutnya, bagaimana cara kita menentukan integral tak tentu dari sebuah fungsi $f(x)$? Simak pada bagian berikutnya ya.

2. Rumus-rumus Integral Tak Tentu
   a. $\int dx = x + C$
   b. $\int a\, dx = ax + C$
   c. Integral Pangkat
      Untuk setiap bilangan real $n \neq -1$, berlaku bahwa:

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$$

Contoh 1:

$\int x^4\, dx =$

Alternatif Penyelesaian:

$$\int x^4\, dx = \frac{1}{4+1}x^{4+1} + C$$
$$= \frac{1}{5}x^5 + C$$

Contoh 2:

$\int \frac{1}{x^3}dx =$

Alternatif Penyelesaian:

$$\int \frac{1}{x^3}dx = \int x^{-3}\, dx$$
$$= \frac{1}{-3+1}x^{-3+1} + C$$

$$= \frac{1}{-2} x^{-2} + C$$
$$= \frac{1}{-2x^2} + C$$

Contoh 3:

$$\int x\sqrt{x}\, dx =$$

Alternatif Penyelesaian:

$$\int x\sqrt{x}\, dx = \int x^{3/2} dx$$
$$= \frac{1}{\frac{3}{2}+1} x^{\frac{3}{2}+1} + C$$
$$= \frac{1}{5/2} x^{\frac{5}{2}} + C$$

d. Integral Perkalian Skalar
   Untuk setiap bilangan real k berlaku:

$$\int k\ f(x) dx = k \int f(x) dx$$

Contoh:

$$\int 4x^3\, dx =$$

Alternatif Penyelesaian:

$$\int 4x^3\, dx = 4 \int x^3 dx$$
$$= 4\left(\frac{1}{3+1} x^{3+1}\right) + C$$
$$= 4\left(\frac{1}{4} x^4\right) + C$$
$$= x^4 + C$$

e. Integral Penjumlahan dan Pengurangan
   Dalam integral berlaku sifat linieritas yaitu:

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$
$$\int (f(x) - g(x)) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$$

Contoh:

$$\int (2x-1)(x+3)\, dx =$$

Alternatif Penyelesaian:

$$\int (2x-1)(x+3)\, dx = \int \left(2x^2 + 5x - 3\right) dx$$
$$= \int 2x^2\, dx + \int 5x\, dx - \int 3\, dx$$
$$= 2 \int x^2\, dx + 5 \int x\, dx - \int 3x^0\, dx$$
$$= \left(\frac{2}{2+1} x^{2+1} + C_1\right) + \left(\frac{5}{1+1} x^{1+1} + C_2\right) - \left(\frac{3}{0+1} x^{0+1} + C_3\right)$$
$$= \frac{2}{3} x^3 + \frac{5}{2} x^2 - 3x + C_1 + C_2 + C_3$$

$$= \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 3x + C$$

f. Integral Metoda Substitusi

Pengintegralan dengan metoda substitusi memiliki cara penyelesaian menggunakan pemisalan sebagai pengganti sementara sebagian atau seluruh fungsi yang akan diintegralkan

Bentuk umum:

$$\int f(u)\left(\frac{du}{dx}\right)du = \int f(u)du$$

Contoh 1:

$$\int (ax+b)^n dx =$$

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan $u = ax + b$

$du = a\,dx$

$dx = \frac{1}{a}du$

$$\int (ax+b)^n dx = \int (u)^n \frac{1}{a}\,du$$

$$= \frac{1}{a}\int u^n du$$

$$= \frac{1}{a}\frac{1}{(n+1)}u^{n+1} + C$$

$$= \frac{1}{a(n+1)}u^{n+1} + C$$

$$= \frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} + C$$

Contoh 2:

$$\int (x+1)(x^2+2x+1)^4 dx =$$

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan $u = x^2 + 2x + 1$

$du = (2x+2)\,dx$

$du = 2(x+1)dx$

$dx = \frac{1}{2(x+1)}du$

$$\int (x+1)(x^2+2x+1)^4 dx = \int (x+1)u^4 \frac{1}{2(x+1)}du$$

$$= \frac{1}{2}\int \cancel{(x+1)}u^4 \frac{1}{\cancel{(x+1)}}du$$

$$= \frac{1}{2}\int \cancel{(x+1)}u^4 \frac{1}{\cancel{(x+1)}}du$$

$$= \frac{1}{2}\int u^4\,du$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{(4+1)}u^{4+1} + C$$

$$= \frac{1}{10}u^5 + C$$

$$= \frac{1}{10}(x^2+2x+1)^5 + C$$

C. Rangkuman

1. Jika $\dfrac{dF(x)}{dx} = f(x)$ maka $\int f(x)dx = F(x) + C$ untuk setiap bilangan real C
2. $\int dx = x + C$
3. $\int a\, dx = x + C$
4. Untuk setiap bilangan real $n \neq -1$, berlaku bahwa:
$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$
5. Untuk setiap bilangan real k berlaku:
$$\int k\ f(x)dx = k \int f(x)dx$$
6. Dalam integral berlaku sifat linieritas yaitu:
$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$
$$\int (f(x) - g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$$
7. Bentuk umum integral metoda substistusi:
$$\int f(u)\left(\frac{du}{dx}\right) du = \int f(u)du$$

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 2 ini diharapkan siswa dapat menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan integral tak tentu.

B. Uraian Materi

Masalah yang Melibatkan Integral Tak Tentu

1. Menentukan persamaan kurva dari fungsi turunan

Ketika mempelajari turunan, kalian sudah membahas gradien dan persamaan garis singgung kurva di suatu titik. Jika $y = f(x)$ maka gradien garis singgung kurva di sembarang titik pada kurva itu adalah:

$$m_{gs} = y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Oleh karena itu jika diketahui gradien garis singgung kurva, maka persamaan kurvanya adalah:

$$y = f(x) = \int f'(x)dx = F(x) + C$$

Lalu bagaimana menentukan nilai C? Nilai C dapat dihitung jika diketahui salah satu titik yang melalui kurva tersebut.

Contoh 1:

Gradien garis singgung kurva $y = f(x)$ di sembarang titik (x, y) adalah $\frac{dy}{dx} = 4x + 3$. Jika kurva melalui titik (0,5) tentukanlah persamaan kurvanya.

Alternatif penyelesaian:

Diketahui $m_{gs} = \frac{dy}{dx} = f'(x)$

Sehingga $y = f(x) = \int (4x + 3)dx$

$= 2x^2 + 3x + C$

Kurva melalui titik (0,5) sehingga nilai $x = 0$ dan $y = 5$ bisa disubstitusikan ke persamaan $f(x) = 2x^2 + 3x + C$

$5 = 2.0^2 + 3.0 + C$

$5 = 0 + 0 + C$

Diperoleh $C = 5$

Sehingga $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$

Contoh 2:

Gradien garis singgung suatu kurva di titik (x, y) adalah $6\sqrt{x}$. Jika Kurva ini melalui titik (9,120) maka persamaan garis singgung kurva ini di titik yang berabsis 1 adalah….

Alternatif penyelesaian:

Diketahui $m_{gs} = \frac{dy}{dx} = f'(x) = 6\sqrt{x}$

Sehingga $y = f(x) = \int \left(6\sqrt{x}\right)dx$

$= \int \left(6x^{1/2}\right)dx$

$= 6 \int x^{1/2} dx$

$$= \frac{6}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= \frac{6}{3/2} x^{\frac{3}{2}} + C$$

$= 6.\frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$

$f(x) = 4x\sqrt{x}$ +C

Kurva melalui titik (9,120) sehingga kita bisa substitusikan koordinat titik tersebut ke persamaan kurva $f(x)$.

$120 = 4.9.\sqrt{9} + C$

$120 = 108 + C$

$C = 12$

$f(x) = 4x\sqrt{x} + 12$

Kita akan menentukan persamaan garis singgung kurva di titik berabsis 1, jadi kita tentukan titik singgung dan gradien garis singgungnya terlebih dahulu.

$f(x) = 4x\sqrt{x} + 12$

$f(1) = 4.1.\sqrt{1} + 12 = 16$

Jadi titik singgungnya adalah (1,16)

Gradien garis singgungya adalah $6\sqrt{x} = 6\sqrt{1} = 6$

Persamaan garis dengan gradien $m = 6$ dan melalui titik (1,16) adalah:

$y - 16 = 6(x - 1)$

$y = 6x + 10$

2. Kecepatan dan Percepatan

Kalian pun sudah mempelajari bahwa turunan dari jarak terhadap waktu adalah kecepatan, dan turunan kecepatan terhadap waktu adalah percepatan.

Kecepatan didefinisikan sebagai laju perubahan jarak terhadap waktu.

$v = \frac{ds}{dt}$ atau $ds = vdt$

$$\int ds = \int vdt$$

$$s = \int v\,dt$$

(v merupakan persamaan kecepatan dalam t)

Jadi jika diketahui persamaan kecepatan, persamaan jarak bisa dihitung dengan mengintegralkan persamaan kecepatan.

Percepatan didefinisikan sebagai laju perubahan kecepatan terhadap waktu.

$a = \frac{dv}{dt}$ atau $dv = a\,dt$

$$\int dv = \int a\,dt$$

$$v = \int a\,dt$$

(a merupakan persamaan percepatan dalam t)

Jadi jika diketahui persamaan percepatam, persamaan kecepatan bisa dihitung dengan mengintegralkan persamaan kecepatan.

Contoh 1:

Sebuah bola bergerak dengan kecepatan $v = 3t^2 - 2t$ m/det. Jika pada saat $t = 3$ detik panjang $s = 9$ meter, tentukan rumus jarak pada saat t detik.

Alternatif penyelesaian:

Diketahui $v = 3t^2 - 2t$

$s = \int v\,dt$ atau $s = \int(3t^2 - 2t)dt$

$= t^3 - t^2 + C$

$s(t) = t^3 - t^2 + C$; diketahui pada saat $t = 3$, $s = 9$ sehingga kita substitusikan ke persamaan untuk mendapatkan nilai C.

$$9 = 3^3 - 3^2 + C$$

$$9 = 27 - 9 + C$$
$$9 = 18 + C$$
$$C = 9 - 18 = -9$$

Rumus jarak diperoleh $s(t) = t^3 - t^2 - 9$

Contoh 2:
Diketahui persamaan percepatan sebuah benda adalah $a = (6t^2 + 1)$ m/det^2, tentukan persamaan kecepatan benda jika pada saat $t = 2$ detik kecepatannya adalah 20 m/det.
Alternatif penyelesaian:
Diketahui $a = 6t^2 + 1$

$$v = \int a\,dt$$
$$v = \int (6t^2 + 1)dt$$
$$= 2t^3 + t + C$$

Sehingga $v(t) = 2t^3 + t + C$; diketahui pada saat $t = 2$ detik kecepatannya adalah 20 m/det, kita substitusikan untuk mendapatkan nilai C.

$$20 = 2.\,2^3 + 2 + C$$
$$20 = 16 + 2 + C$$

Diperoleh nilai $C = 2$, sehingga persamaan kecepatannya adalah $v(t) = 2t^3 + t + 2$

C. Rangkuman

1. Jika $y = f(x)$ maka gradien garis singgung kurva di sembarang titik pada kurva itu adalah:
$$m_{gs} = y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$
maka persamaan kurvanya adalah:
$$y = f(x) = \int f'(x)dx = F(x) + C$$
2. Kecepatan didefinisikan sebagai laju perubahan jarak terhadap waktu.
$v = \frac{ds}{dt}$ atau $ds = vdt$
Untuk mendapatkan rumus jarak jika diketahui rumus kecepatan adalah:
$$\int ds = \int vdt$$
$$s = \int v\,dt$$
3. Kecepatan didefinisikan sebagai laju perubahan kecepatan terhadap waktu.
$a = \frac{dv}{dt}$ atau $dv = a\,dt$
Untuk mendapatkan rumus jarak jika diketahui rumus percepatan adalah:
$$\int dv = \int a\,dt$$
$$v = \int a\,dt$$