KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
Kemiringan Garis Singgung dan Kemonotan Fungsi Aljabar

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini, diharapkan Ananda dapat menganalisis keberkaitan turunan pertama fungsi aljabar dengan kemiringan garis singgung dan selang kemonotonan fungsi (interval fungsi naik dan fungsi turun) dan dapat menggunakan turunan pertama fungsi untuk menentukan kemiringan garis singgung kurva, persamaan garis singgung dan garis normal kurva dan selang kemonotonan fungsi aljabar.

B. Uraian Materi

Dalam mempelajari modul Aplikasi Turunan Fungsi Aljabar ada materi prasyarat yang harus dipelajari kembali, diantaranya adalah rumus turunan atau diferensial fungsi aljabar beserta sifat-sifatnya.

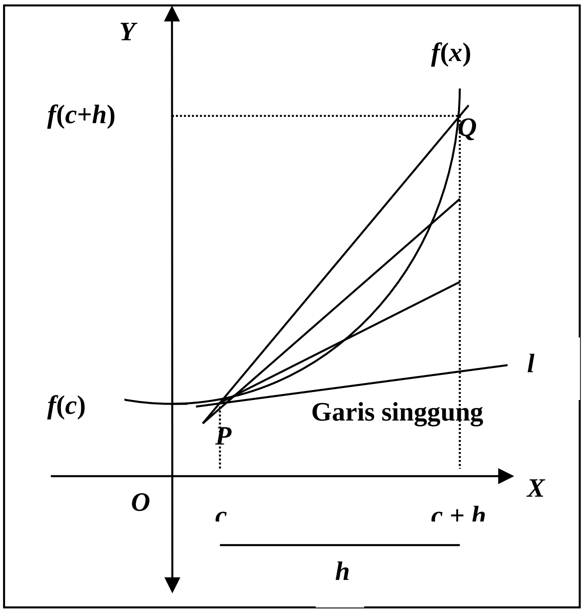
Rumus Turunan Fungsi Aljabar serta Sifat-sifatnya

Misalkan f, u, dan v fungsi dari x bernilai real serta dapat diturunkan dan a konstanta bilangan real, maka berlaku:

- $f(x) = a \Rightarrow f'(x) = 0$
- $f(x) = ax \Rightarrow f'(x) = a$
- $f(x) = ax^n \Rightarrow f'(x) = anx^{n-1}$
- $f(x) = au^n \Rightarrow f'(x) = an\,u^{n-1}.\,u'$
- $f(x) = u \pm v \Rightarrow f'(x) = u' \pm v'$
- $f(x) = u\,.\,v \Rightarrow f'(x) = u'.\,v + u\,.\,v'$
- $f(x) = \frac{u}{v} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$

Kemiringan Garis Singgung

Perhatikan Gambar 2 berikut!



Gambar 2. Konsep kemiringan garis singgung

Misalkan P adalah sebuah titik tetap pada suatu kurva dan andaikan Q adalah sebuah titik berdekatan yang dapat dipindah-pindahkan pada kurva tersebut. Koordinat titik P adalah $(c, f(c))$, titik Q mempunyai koordinat $(c + h, f(c + h))$. Tali busur yang melalui P dan Q mempunyai kemiringan atau gradien

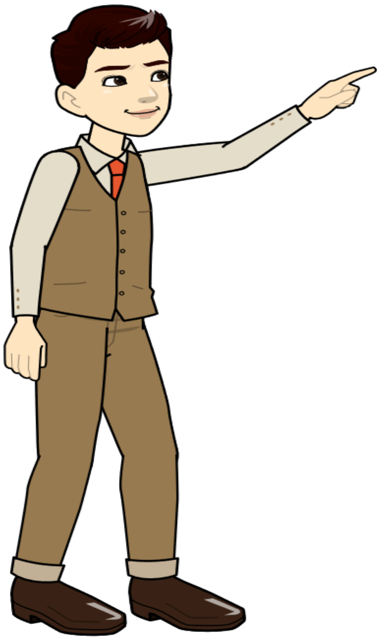
$$m_{PQ} = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Garis l merupakan garis singgung kurva di titik P. Kemiringan (gradien) garis singgung l adalah:

$$m = f'(c) = \lim_{h \to 0} m_{PQ} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Persamaan garis singgung kurva $y = f(x)$ dititik (x_1, y_1) adalah $y - y_1 = m(x - x_1)$, dengan $m = f'(x_1) = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_1}$

Garis normal adalah garis yang tegak lurus terhadap garis singgung pada titik singgung. Persamaannya adalah $y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$.



Catatan:
Pengertian dua garis sejajar dan tegak lurus sering muncul dalam persamaan garis singgung.

- Misalkan garis g: $y = m_1x + c_1$ sejajar garis h: $y = m_2x + c_2$ di mana m_1 dan m_2 masing-masing gradien dari garis g dan h, maka $m_1 = m_2$.
- Misalkan garis g: $y = m_1x + c_1$ tegak lurus garis h: $y = m_2x + c_2$ di mana m_1 dan m_2 masing-masing gradien dari garis g dan h, maka $m_1 \cdot m_2 = -1$.

Contoh 1

Tentukan gradien garis singgung kurva $y = x^2 + 2x - 2$ di titik (1, 1).

Penyelesaian:

- Tentukan turunan pertama dari fungsi y
  $y = x^2 + 2x - 2$
  $\frac{dy}{dx} = 2x + 2$
- Tentukan gradien garis singgung m
  $m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}$
  $m = 2(1) + 2 = 4$
- Jadi, gradien garis singgung kurva adalah 2 .

Contoh 2

Tentukan persamaan garis singgung dan garis normal pada kurva $y = 2x^3 - 5x^2 - x + 6$ di titik yang berabsis 1.

Penyelesaian:

- Tentukan titik singgung (x_1, y_1)
  Absis $= x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = 2x^3 - 5x^2 - x + 6$
  $= 2(1)^3 - 5(1)^2 - (1) + 6$
  $= 2$
  Jadi, titik singgungnya adalah (1, 2).

- Tentukan turunan pertama fungsi y

  $y = 2x^3 - 5x^2 - x + 6$, maka

  $\frac{dy}{dx} = 6x^2 - 10x - 1$
- Tentukan gradien m

  $m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}$

  $= 6(1)^2 - 10(1) - 1$

  $= -5$
- Tentukan persamaan garis singgung

  $y - y_1 = m\ (x - x_1)$

  $\Leftrightarrow y - 2 = -5(x - 1)$

  $\Leftrightarrow y - 2 = -5x + 5$

  $\Leftrightarrow 5x + y - 7 = 0$
- Tentukan persamaan garis normal

  $y - y_1 = -\frac{1}{m}\ (x - x_1)$

  $\Leftrightarrow y - 2 = -\frac{1}{5}\ (x - 1)$

  $\Leftrightarrow 5y - 10 = -x + 1$

  $\Leftrightarrow x + 5y - 11 = 0$
- Kesimpulan

  Jadi, persamaan garis singgung kurva $y = 2x^3 - 5x^2 - x + 6$ di titik yang berabsis 1 adalah $5x + y - 7 = 0$ dan persamaan garis normalnya adalah $x + 5y - 11 = 0$.

Contoh 3

Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = x^2 + 3$ yang tegak lurus dengan garis $x + 2y + 2 = 0$.

Penyelesaian :

- Tentukan turunan pertama fungsi y

  $y = x^2 + 3$

  $\frac{dy}{dx} = 2x$
- Tentukan gradien garis singgung

  Misal garis h: $x + 2y + 2 = 0$

  $$y = -\tfrac{1}{2}x - 1\ \Rightarrow m_h = -\tfrac{1}{2}$$

  Misal g adalah garis singgung kurva, karena garis g tegak lurus garis h ($g \perp h$), maka

  $m_g \cdot m_h = -1$

  $m_g \cdot (-\tfrac{1}{2}) = -1$

  $m_g = 2$
- Tentukan titik singgung (x_1, y_1)

  $m_g = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_1}$

  $2 = 2x$

  $x = 1$

  $x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = (1)^2 + 3 = 4$

  Jadi, titik singgungnya $(x_1, y_1) = (1, 4)$
- Tentukan persamaan garis singgung

  $y - y_1 = m_g\ (x - x_1)$

$\Leftrightarrow y - 4 = 2\,(x - 1)$

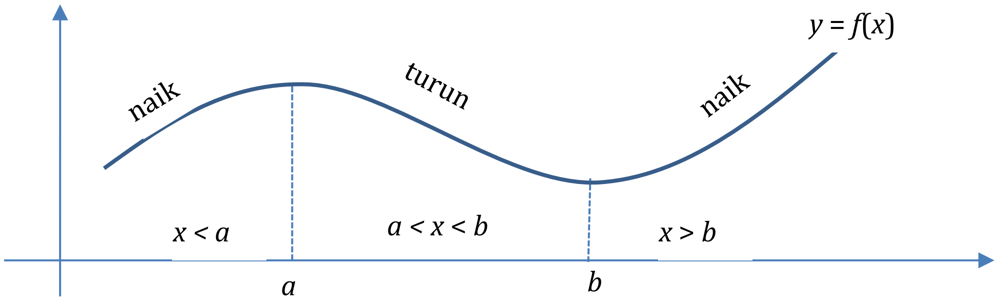
$\Leftrightarrow y = 2x + 2$

❖ Kesimpulan

Jadi, persamaan garis singgung kurva $y = x^2 + 3$ yang tegak lurus dengan garis $x + 2y + 2 = 0$ adalah $y = 2x + 2$.

Kemonotan Fungsi

Secara grafik, jika kurva suatu fungsi merupakan sebuah kurva mulus, maka fungsi monoton naik dan fungsi monoton turun dapat dengan mudah Ananda amati. Misalnya untuk grafik fungsi yang digambarkan dibawah ini, Ananda dapat mengatakan bahwa fungsi $y = f(x)$ monoton naik pada interval $x < a$ atau $x > b$, monoton turun pada interval $a < x < b$. Kadangkala istilah monoton bisa dihilangkan sehingga menjadi fungsi naik dan fungsi turun.



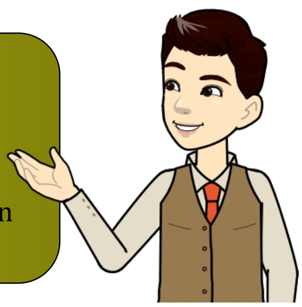
Gambar 3. Interval kurva naik dan turun

Secara aljabar pengertian fungsi naik dan fungsi turun adalah sebagai berikut.

Definisi 1

Misalkan f fungsi trigonometri yang terdefinisi di selang I.

- Fungsi f disebut ***naik*** pada selang I jika untuk setiap x_1 dan x_2 di I, dengan $x_1 < x_2$ maka $f(x_1) < f(x_2)$.
- Fungsi f dikatakan ***turun*** pada selang I jika untuk setiap x_1 dan x_2 di I, dengan $x_1 < x_2$ maka $f(x_1) > f(x_2)$.

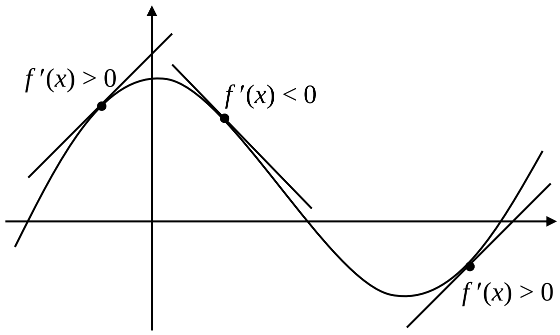


Ingat kembali bahwa turunan pertama $f'(x)$ memberikan makna kemiringan dari garis singgung pada grafik f di titik x. Jika $f'(x) > 0$, garis singgung naik ke kanan (lihat Gambar 3, jika $f'(x) < 0$, garis singgung jatuh ke kanan Untuk menyelidiki atau mencari interval di mana fungsi naik dan di mana fungsi turun, Ananda dapat menggunakan turunan pertama seperti teorema berikut.

Teorema 1

Misalkan f fungsi trigonometri yang terdefinisi di selang I dan f mempunyai turunan di I.

- Jika $f'(x) > 0$ dalam selang I, maka f merupakan fungsi naik.
- Jika $f'(x) < 0$ dalam selang I, maka f merupakan fungsi turun.



Gambar 3 Fungsi naik dan fungsi turun

Agar Ananda lebih mahir dalam menentukan interval di mana fungsi naik dan turun pada fungsi aljabar, pelajari contoh berikut.

Contoh 4

Tentukan selang atau interval di mana fungsi naik dan turun dari fungsi $f(x) = x^3 - 3x^2 - 15$.

Penyelesaian :

❖ Tentukan turunan pertama fungsi $f(x)$

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 15$, maka

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

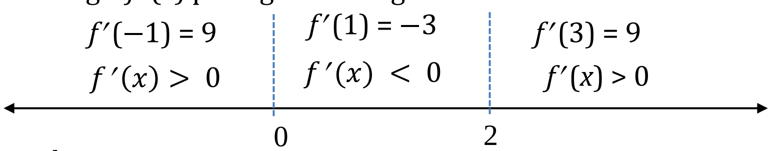
❖ Tentukan pembuat nol fungsi $f'(x)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0$

$\Leftrightarrow 3x(x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ atau $x = 2$

❖ Uji nilai fungsi $f'(x)$ pada garis bilangan



❖ Kesimpulan

➢ syarat $f(x)$ naik adalah $f'(x) > 0$, sehingga $f(x)$ naik pada interval $x < 0$ atau $x > 2$

➢ syarat $f(x)$ turun adalah $f'(x) < 0$, sehingga $f(x)$ turun pada interval $0 < x < 2$.

Contoh 5

Tentukan selang atau interval di mana fungsi naik dan turun dari fungsi

$f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x - 1}$

Penyelesaian

❖ Tentukan turunan pertama fungsi $f(x)$

$f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x - 1}$, menggunakan aturan pembagian, diperoleh

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - (x^2 + 3)(1)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$$

- Tentukan titik-titik kritis
  - Titik stasioner $f'(x) = 0$
    $\Leftrightarrow (x + 1)(x - 3) = 0$
    $\Leftrightarrow x = -1$ atau $x = 3$
  - Titik singular
    $\Leftrightarrow (x - 1) \neq 0$
    $\Leftrightarrow x \neq 1$
- Uji nilai fungsi $f'(x)$ pada garis bilangan

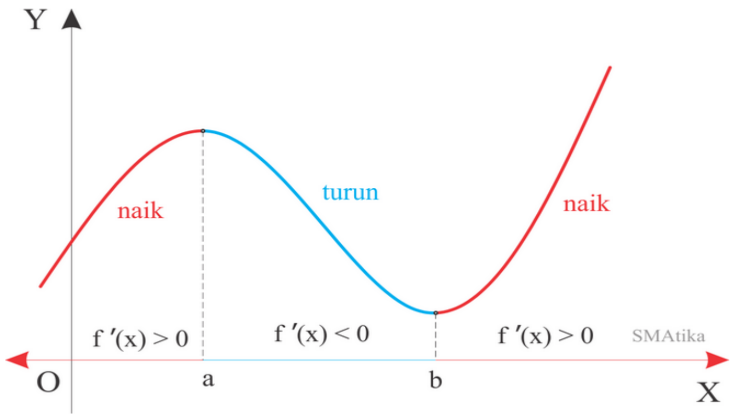
$x < -1$	$-1 < x < 1$	$1 < x < 3$	$x > 3$
$f'(-2) = \frac{5}{9}$	$f'(0) = -3$	$f'(2) = -3$	$f'(4) = \frac{5}{9}$
$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$

$-1 \qquad 1 \qquad 3$

- Kesimpulan
  - syarat $f(x)$ naik adalah $f'(x) > 0$, sehingga $f(x)$ naik pada interval $x < -1$ atau $x > 3$
  - syarat $f(x)$ turun adalah $f'(x) < 0$, sehingga $f(x)$ turun pada interval $-1 < x < 1$ atau $1 < x < 3$.

C. Rangkuman

- Gradien garis singgung di titik (x_1, y_1) adalah $m = f'(x_1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$
- Persamaan garis singgung kurva $y = f(x)$ dititik (x_1, y_1) adalah $y - y_1 = m(x - x_1)$, dengan $m = f'(x_1) = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x = x_1}$
- Garis normal adalah garis yang tegak lurus terhadap garis singgung pada titik singgung. Persamaannya adalah $y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$.
- Misalkan f fungsi yang terdefinisi di selang I.
  - Fungsi f disebut ***naik*** pada selang I jika untuk setiap x_1 dan x_2 di I, dengan $x_1 < x_2$ maka $f(x_1) < f(x_2)$.
  - Fungsi f dikatakan ***turun*** pada selang I jika untuk setiap x_1 dan x_2 di I, dengan $x_1 < x_2$ maka $f(x_1) > f(x_2)$.
- Misalkan f fungsi yang terdefinisi di selang I dan f mempunyai turunan di I.
  - Jika $f'(x) > 0$ dalam selang I, maka f merupakan fungsi naik.
  - Jika $f'(x) < 0$ dalam selang I, maka f merupakan fungsi turun.



KEGIATAN PEMBELAJARAN 2
Maksimum dan Minimum Fungsi Aljabar

A. Tujuan Pembelajaran

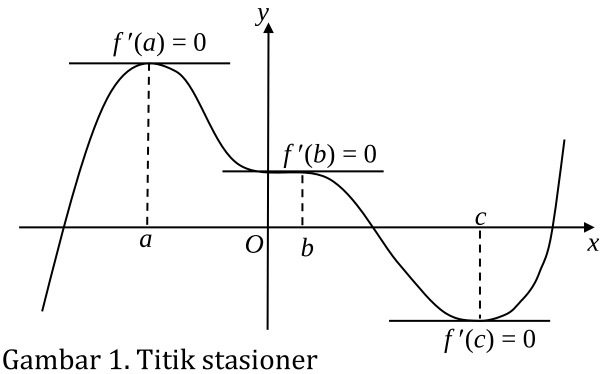
Setelah kegiatan pembelajaran 2 ini, diharapkan Ananda dapat menganalisis keberkaitan turunan pertama fungsi dengan nilai maksimum dan nilai minimum dan dapat menggunakan turunan pertama fungsi untuk menentukan titik maksimum, titik minimum berkaitan dengan masalah kontekstual.

B. Uraian Materi

Titik dan Nilai Stasioner Fungsi Aljabar

Titik stasioner terjadi apabila garis singgung pada kurva di titik tersebut merupakan garis horisontal. Perhatikan Gambar disamping.

Definisi titik stasioner diberikan sebagai berikut:

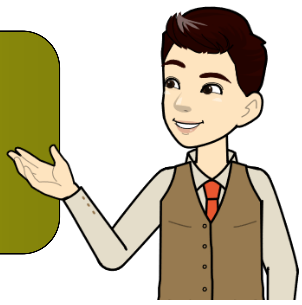


Gambar 1. Titik stasioner

Definisi 1

Misalkan f fungsi trigonometri yang yang mempunyai turunan.
Jika $f'(a) = 0$, maka $f(x)$ stasioner di titik $x = a$, dengan

- Nilai $f(a)$ disebut nilai stasioner $f(x)$ di $x = a$.
- Titik $(a, f(a))$ disebut titik stasioner



Contoh 1

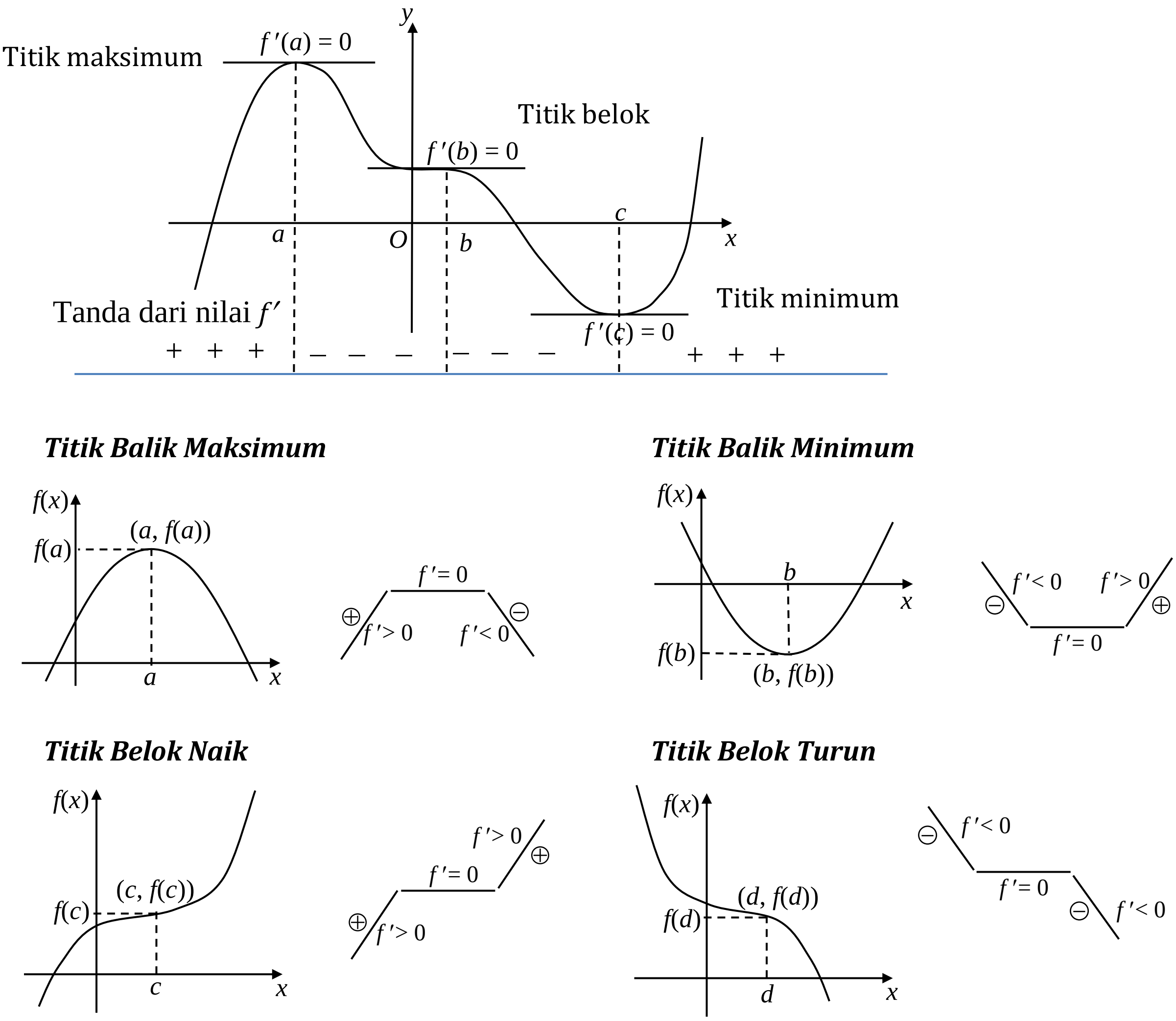
Tentukan nilai dan titik stasioner fungsi $f(x) = x^3 - 12x + 8$.

Penyelesaian:

- Tentukan turunan pertama fungsi $f(x)$
  $f(x) = x^3 - 12x + 8$, maka
  $f'(x) = 3x^2 - 12$
- Syarat stasioner
  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12 = 0$
  $\Leftrightarrow 3(x^2 - 4) = 0$
  $\Leftrightarrow 3(x + 2)(x - 2) = 0$
  $\Leftrightarrow x = -2$ atau $x = 2$
- Menentukan nilai stasioner
  $x = -2 \Rightarrow f(-2) = (-2)^3 - 12(-2) + 8 = 24$
  $x = 2 \Rightarrow f(2) = (2)^3 - 12(2) + 8 = -8$
- Kesimpulan
  - Nilai stasionernya adalah –8 dan 24
  - Titik stasionernya (2, –8) dan (–2, 24)

Menentukan Titik Maksimum dan Titik Minimum

Perhatikan Gambar 2 berikut, menentukan titik maksimum, titik minimum, dan titik belok menggunakan uji turunan pertama, diuraikan dalam sifat berikut.

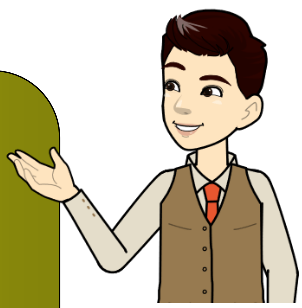


Gambar 2. Titik Maksimum, Titik Minimum, dan Titik Belok

Sifat 1

Misalkan f fungsi yang mempunyai turunan dan $f'(a) = 0$

- Jika nilai f' bertanda positif di $x < a$ dan bertanda negatif di $x > a$, maka $(a, f(a))$ disebut titik maksimum lokal.
- Jika nilai f' bertanda negatif di $x < c$ dan bertanda positif di $x > c$, maka $(c, f(c))$ disebut titik minimum lokal.
- Jika disekitar titik $x = b$ tidak ada perubahan tanda nilai f', maka $(b, f(b))$ disebut titik belok horizontal.



Untuk lebih memahami lagi Ananda dalam menentukan titik maksimum, titik minimum, dan titik belok menggunakan uji turunan pertama, pelajari contoh berikut.

Contoh 2

Tentukan titik balik maksimum dan minimum dari fungsi $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x$

Penyelesaian :

- Tentukan turunan pertama

  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x$

  $f'(x) = x^2 + x - 6$

- Syarat titik stasioner

  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0$

  $\Leftrightarrow (x-2)(x+3) = 0$

  $\Leftrightarrow x - 2 = 0$ atau $x + 3 = 0$

  $\Leftrightarrow x = 2$ atau $x = -3$

- Menentukan titik stasioner

  $x = 2 \Rightarrow f(2) = \frac{1}{3}(2)^3 + \frac{1}{2}(2)^2 - 6(2) = \frac{8}{3} + 2 - 12 = -7\frac{1}{3}$

  $x = -3 \Rightarrow f(-3) = \frac{1}{3}(-3)^3 + \frac{1}{2}(-3)^2 - 6(-3) = -9 + \frac{9}{2} + 18 = 13\frac{1}{2}$

  Jadi, ada dua titik stasioner, yaitu $\left(2, -7\frac{1}{3}\right)$ dengan nilai stasionernya $-7\frac{1}{3}$ dan $\left(-3, 13\frac{1}{2}\right)$ dengan nilai stasionernya $13\frac{1}{2}$.

- Uji nilai fungsi $f'(x)$ pada garis bilangan dan beri tanda

X	$x < -3$	-3	$-3 < x < 2$	2	$x > 2$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
gradien					

maksimum ***minimum***

- Kesimpulan

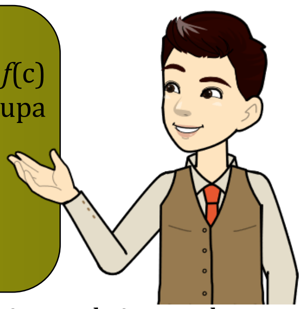
  - $f(-3) = 13\frac{1}{2}$ merupakan nilai balik maksimum, karena f' berubah tanda dari + (positif) ke – (negatif) dan titik balik maksimumnya adalah $\left(-3, 13\frac{1}{2}\right)$
  - $f(2) = -7\frac{1}{3}$ merupakan nilai balik minimum, karena f' berubah tanda dari – (negatif) ke + (positif) dan titik balik minimum adalah $\left(2, -7\frac{1}{3}\right)$.

Nilai Maksimum dan Minimum suatu Fungsi pada Interval Tertutup [a, b]

Biasanya fungsi yang ingin kita maksimumkan atau minimumkan akan mempunyai interval $I = [a, b]$ sebagai daerah asalnya. Nilai-nilai ekstrem sebuah fungsi yang didefinisikan pada interval tertutup sering kali terjadi pada titik-titik ujung interval.

Sifat 2

Misalkan f didefinisikan pada selang I yang memuat titik c. Jika $f(c)$ adalah titik ekstrim, maka c haruslah suatu titik kritis, yakni c berupa salah satu:
- titik ujung dari I
- titik stasioner dari f ($f'(c) = 0$)
- titik singular dari f ($f'(c)$ tidak ada)



Tahapan menentukan nilai maksimum dan minimum suatu fungsi kontinu pada interval tertutup $[a, b]$ adalah sebagai berikut.

1) Selesaikan $f'(x)$
2) Cari semua titik kritis $f(x)$ pada interval tertutup $[a, b]$, yaitu
   a) Titik ujung interval, $x = a$ dan $x = b$
   b) Titik stasioner $c \in [a, b]$, dengan $f'(c)=0$
   c) Titik singular $d \in [a, b]$, dengan $f'(d)$ tidak ada
3) Hitung nilai fungsi $f(x)$ pada semua titik kritis yang diperoleh pada langkah 2). Nilai terbesar dan terkecil yang dihasilkan merupakan nilai maksimum dan minimum fungsi f.

Contoh 3

Tentukan nilai maksimum dan minimum dari $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ dalam interval $-2 \le x \le 1$.

Penyelesaian:

- Tentukan turunan pertama fungsi $f(x)$

  $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$, maka

  $$\begin{aligned} f'(x) &= 12x^2 - 6x - 6 \\ &= 6(2x^2 - x - 1) \\ &= 6(x + 1)(2x - 1) \end{aligned}$$
- Cari semua titik kritis $f(x)$ pada interval tertutup $[-2, 1]$, yaitu
  1. Titik ujung interval, $x = -2$ dan $x = 1$
  2. Titik stasioner

     $$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 6(x + 1)(2x - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \text{ atau } x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$
  3. Tidak ada titik singular
- Hitung f pada setiap titik kritis

Titik kritis	$f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$
$x = -2$	$f(-2) = 4(-2)^3 + 3(-2)^2 - 6(-2) + 1 = -7$
$x = -1$	$f(-1) = 4(-1)^3 + 3(-1)^2 - 6(-1) + 1 = 6$
$x = \frac{1}{2}$	$f(\frac{1}{2}) = 4(\frac{1}{2})^3 + 3(\frac{1}{2})^2 - 6(\frac{1}{2}) + 1 = -\frac{3}{4}$
$x = 1$	$f(1) = 4(1)^3 + 3(1)^2 - 6(1) + 1 = 2$

- Kesimpulan
  - $f(-2) = -7$ merupakan nilai minimum
  - $f(-1) = 6$ merupakan nilai maksimum.

Maksimum dan Minimum pada Masalah Kontekstual

Dalam hidup ini, kita sering menghadapai masalah guna mendapatkan jalan terbaik untuk melalkukan sesuatu. Sebagai contoh, seorang petani ingin memilih kombinasi hasil panen yang dapat menghasilkan keuntungan terbesar. Seorang dokter akan menentukan dosis obat yang terkecil untuk menyembuhkan suatu penyakit. Seorang kepala pabrik akan menekan sekecil mungkin biaya pendistribusian produknya. Kadangkala salah satu dari masalah di atas dapat dirumuskan sehingga akan melibatkan memaksimumkan dan meminimumkan fungsi tertentu.

Dalam menyelesaikan maksimum dan minimum pada masalah kontekstual, harus memperhatikan tahapan berikut.

- ❖ Tetapkan besaran yang ada dalam masalah sebagai variabel untuk memperoleh hubungan atau ekspresi matematikanya
- ❖ Tetapkan rumus fungsi satu variabel yang merupakan model matematika dari masalah
- ❖ Tentukan penyelesaian optimum dari model matematika
- ❖ Berikanlah tafsiran terhadap hasil yang diperoleh

Berikut diberikan beberapa contoh maksimum dan minimum pada masalah kontekstual.

Contoh 4

Akan dibuat sebuah persegi panjang dengan keliling 48 cm. Berapakah ukuran persegi panjang tersebut agar luasnya maksimum ?

Penyelesaian :

K = $2(p + l) = 48 \;\Rightarrow\; p + l = 24$
$\Rightarrow\; l = 24 - p$ ………… (*)
Luas persegi panjang :

$$L = p\,.\,l$$
$$= p\,.\,(24 - p)$$
$$= 24p - p^2$$

$$\frac{dL}{dp} = 24 - 2p$$

Syarat ekstrim untuk L adalah $\frac{dL}{dp} = 0$, sehingga :

$24 - 2p = 0$
$2p = 24$
$p = 12$

Substitusikan $p = 12$ ke (*), sehingga diperoleh : $l = 24 - 12 = 12$.
Jadi, ukuran persegi panjang tersebut agar luasnya maksimum adalah $p = 12$ cm, $l = 12$ cm, dan luas persegi panjang = 12 . 12 = 144 cm^2.

Contoh 5

Jumlah dua buah bilangan adalah 10. Tentukan kedua bilangan tersebut sehingga jumlah kuadratnya paling minimum.

Penyelesaian :

Misalkan bilangan pertama = x dan bilangan kedua = y
Jumlah kedua bilangan 10, sehingga $x + y = 10 \;\rightarrow\; y = 10 - x$ …….. (*)
Misalkan jumlah kuadrat kedua bilangan = B, maka :

$B = x^2 + y^2$ ……… (**)

Substitusikan persamaan (*) ke (**), sehingga diperoleh :
$B = x^2 + (10 - x)^2$
$B = x^2 + (100 - 20x + x^2) = 2x^2 - 20x + 100$
$\frac{dB}{dx} = 4x - 20$

syarat ekstrim untuk B adalah $\frac{dB}{dx} = 0$,

sehingga : $4x - 20 = 0$
$\rightarrow 4x = 20$
$\rightarrow x = 5$
substitusikan $x = 5$ ke (*) sehingga diperoleh : $y = 10 - 5 = 5$
Jadi, kedua bilangan tersebut agar jumlah kuadratnya minimum adalah
5 dan 5.

Contoh 6

Sebuah peluru ditembakkan ke atas. Tinggi h meter setelah t detik dirumuskan dengan $h(t) = 120t - 5t^2$, tentukanlah tinggi maksimum yang dicapai peluru tersebut.

Penyelesaian :

Tinggi peluru : $h(t) = 120t - 5t^2$ ……… (*)
$h'(t) = 120 - 10t$
peluru mencapai tinggi maksimum jika $h'(t) = 0$, sehingga :

$$120 - 10t = 0 \Leftrightarrow 120 = 10t \Leftrightarrow t = \frac{120}{10} = 10 \text{ detik}$$

Substitusikan $t = 10$ detik ke (*), sehingga diperoleh tinggi maksimum peluru :
$h(10) = 120(10) - 5(10)^2 = 1200 - 500 = 700$ meter.

Contoh 7

Sebuah kotak tanpa tutup akan dibuat dari bahan seng dengan kapasitas 36 dm^3. Jika ukuran panjang kotak dua kali lebarnya, tentukanlah ukuran kotak agar bahan yang dibutuhkan seminimum mungkin.

Penyelesaian :

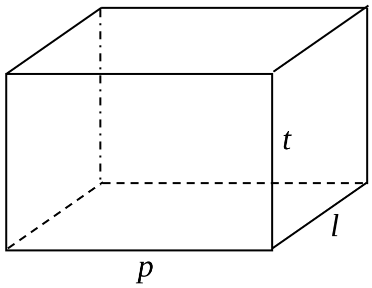
Misalkan panjang = p, lebar = l, dan tinggi = t.
Panjang kotak dua kali lebarnya, berarti $p = 2l$ ……. (*)
Volume kotak = 36 dm^3

$$p\,.\,l\,.\,t = 36 \rightarrow (2l)\,.\,l\,.\,t = 36 \rightarrow t = \frac{36}{2l^2} \rightarrow t = \frac{18}{l^2} \text{ …….. (**)}$$

Bahan kotak akan diminimumkan, berarti yang diminimumkan adalah luas permukaan kotak tanpa tutup, disimbol dengan A.
A = luas alas + 2 luas sisi samping + 2 luas sisi depan/belakang
$A = p.l + 2\,l.t + 2\,p.\,t$ ………….. (***)
Substitusikan (*) dan (**) ke persamaan (***), sehingga diperoleh :

$$A = (2l).l + 2l.\left(\frac{18}{l^2}\right) + 2(2l).\left(\frac{18}{l^2}\right)$$

$$= 2l^2 + \frac{36}{l} + \frac{72}{l}$$



$= 2l^2 + \frac{108}{l}$

$\frac{dA}{dl} = 4l - 108l^{-2} = 4l - \frac{108}{l^2}$

Luas permukaan kotak minimum jika $\frac{dA}{dl}$ = 0, sehingga
:

$4l - \frac{108}{l^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4l = \frac{108}{l^2}$

$\Leftrightarrow \quad 4l^3 = 108$

$\Leftrightarrow \quad l^3 = \frac{108}{4} = 27$

$\Leftrightarrow \quad l = \sqrt[3]{27} = 3$ dm.

substitusikan l = 3 dm ke (*) dan (**), diperoleh : p = 2(3) = 6m dan

$t = \frac{18}{3^2} = \frac{18}{9} = 2$ dm.

Jadi, ukuran kotak agar bahan yang digunakan minimum adalah p = 6 dm, l = 3 dm, dan t = 2 dm.

C. Rangkuman

- Misalkan f fungsi yang yang mempunyai turunan. Jika $f'(a) = 0$, maka $f(x)$ stasioner di titik $x = a$, dengan
  - Nilai $f(a)$ disebut nilai stasioner $f(x)$ di $x = a$.
  - Titik $(a, f(a))$ disebut titik stasioner
- Misalkan f fungsi yang yang mempunyai turunan dan $f'(a) = 0$
  - Jika nilai f'bertanda positif di $x < a$ dan bertanda negatif di $x > a$, maka $(a, f(a))$ disebut titik maksimum lokal.
  - Jika nilai f'bertanda negatif di $x < c$ dan bertanda positif di $x > c$, maka $(c, f(c))$ disebut titik minimum lokal.
  - Jika disekitar titik $x = b$ tidak ada perubahan tanda nilai f', maka $(b, f(b))$ disebut titik belok horisontal.
- Misalkan f didefinisikan pada selang I yang memuat titik c. Jika f(c) adalah titik ekstrim, maka c haruslah suatu titik kritis, yakni c berupa salah satu:
  - titik ujung dari I
  - titik stasioner dari f (f′ (c) = 0)
  - titik singular dari f (f′ (c) tidak ada)
- Dalam menyelesaikan maksimum dan minimum pada masalah kontekstual, harus memperhatikan tahapan berikut.
  - Tetapkan besaran yang ada dalam masalah sebagai variabel untuk memperoleh hubungan atau ekspresi matematikanya
  - Tetapkan rumus fungsi satu variabel yang merupakan model matematika dari masalah
  - Tentukan penyelesaian optimum dari model matematika
  - Berikanlah tafsiran terhadap hasil yang diperoleh

KEGIATAN PEMBELAJARAN 3
Menggambar Grafik Fungsi Aljabar

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 3 ini, diharapkan Ananda dapat menggambar grafik fungsi Aljabar.

B. Uraian Materi

Dengan materi prasyarat yang mencukupi yaitu menentukan turunan pertama dari suatu fungsi yang diberikan, fungsi naik, fungsi turun dan stasioner, Ananda dapat memulai modul tersebut.

Langkah-langkah menggambar grafik fungsi aljabar:

- Tentukan koordinat titik-titik potong kurva dengan sumbu koordinat.
  a. Titik potong dengan sumbu–x, syarat $y = 0$
  b. Titik potong dengan sumbu–y, syarat $x = 0$
- Tentukan titik-titik stasioner dan jenisnya.
- Tentukan selang tempat fungsi naik atau turun.
- Tentukan beberapa titik lainnya untuk mempermudah dalam menggambar grafik (jika diperlukan).

Contoh

Gambarlah sketsa grafik fungsi $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x$.

Penyelesaian :

1. Titik-titik potong terhadap :

   a. sumbu x, syarat $y = 0$, maka : $\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow$

$$x\left(\frac{1}{3}x^2 - x - 8\right) = 0$$

$x = 0$ atau $\frac{1}{3}x^2 - x - 8 = 0$ (dikali 3)

$x = 0$ atau $x^2 - 3x - 24 = 0$

Pake rumus kuadrat

Diketahui : $a = 1$, $b = -3$, $c = -24$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-24)}}{2\ (1)}$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 96}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{105}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm 10{,}25}{2}$$

$$x_1 = \frac{3 + 10{,}25}{2} = \frac{13{,}25}{2} = 6{,}625$$

$$x_2 = \frac{3 - 10{,}25}{2} = \frac{-7{,}05}{2} = -3{,}525$$

$x = 0$ atau $x = 6{,}62$ atau $x = -3{,}62$

Jadi diperoleh titik potong $(0, 0)$, $(6{,}62;\ 0)$, dan $(-3{,}62;\ 0)$

b. sumbu y, syarat $x = 0$, maka : $y = \frac{1}{3}(0)^3 - (0)^2 - 8(0) = 0$ diperoleh titik $(0, 0)$

2. Titik-titik stasioner ($f'(x) = 0$)

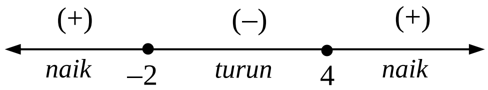
   $f'(x) = x^2 - 2x - 8 = 0 \iff (x + 2)(x - 4) = 0$

   sehingga absis titik stasioner $x = -2$ dan $x = 4$

   untuk $x = -2$, maka $y = f(-2) = \frac{1}{3}(-2)^3 - (-2)^2 - 8(-2) = -\frac{8}{3} - 4 + 16 = 9\frac{1}{3}$

   untuk $x = 4$, maka $y = f(4) = \frac{1}{3}(4)^3 - (4)^2 - 8(4) = \frac{64}{3} - 16 - 32 = -26\frac{2}{3}$

   Jenis stasioner :



   Untuk $x = -2$, terdapat titik balik maksimum, yaitu $\left(-2, 9\frac{1}{3}\right)$, dan

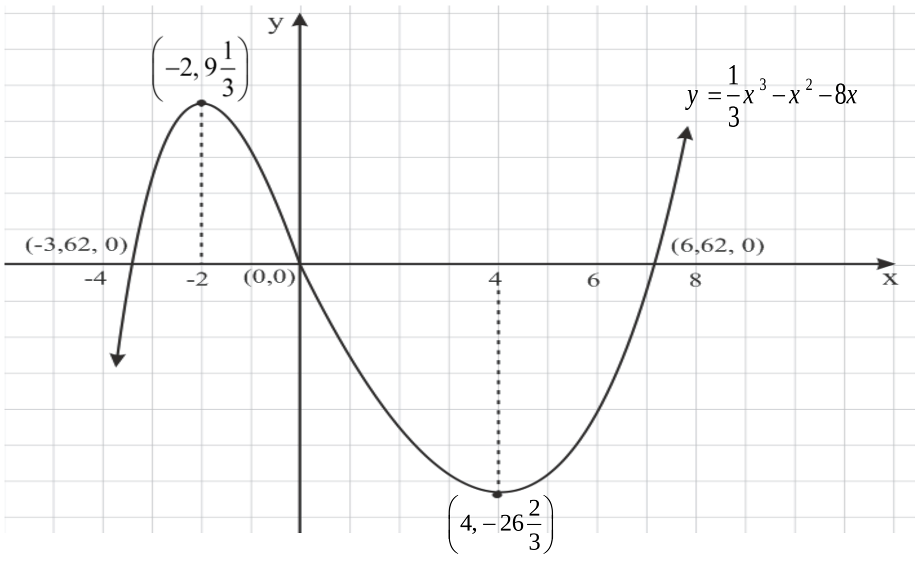
   Untuk $x = 4$, terdapat titik balik minimum, yaitu $\left(4, -26\frac{2}{3}\right)$

3. $f(x)$ naik pada interval $x < -2$ atau $x > 4$

   $f(x)$ turun pada interval $-2 < x < 4$

4. Jika diperlukan, tentukan dua titik lagi. Misalnya, $x = 7$ (di sebelah kanan titik potong) dan $x = -4$ (di sebelah kiri titik potong).

5. Gambarkan semua titik yang diperoleh dari hasil perhitungan di atas pada bidang cartesius, kemudian hubungkan semua titik-titik tersebut sehingga diperoleh kurva berikut.



C. Rangkuman

Langkah-langkah menggambar grafik fungsi suku banyak :

- Tentukan koordinat titik-titik potong kurva dengan sumbu koordinat.
  - Titik potong dengan sumbu – x, syarat $y = 0$
  - Titik potong dengan sumbu – y, syarat $x = 0$
- Tentukan titik-titik stasioner dan jenisnya.
- Tentukan selang tempat *fungsi* naik atau turun.
- Tentukan beberapa titik lainnya untuk mempermudah dalam menggambar grafik (jika diperlukan).

D. Latihan Soal

Sebagai latihan Ananda, coba gambarlah sketsa grafik : (Gunakan langkah-langkah sesuai contoh soal yaa)

1. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$
2. $y = 8 + 2x^2 - x^4$

Penyelesaian:

1. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$ **(skor 50)**

- Cari perpotongan dengan sumbu-sumbu koordinat.
  - Titik potong dengan sumbu $Y \Rightarrow x = 0$

    $y = 2(0)^3 + 3(0)^2 - 12(0) + 7 = 7 \Rightarrow (0, 7)$
  - Titik potong dengan sumbu $X \Rightarrow y = 0$

    $2x^3 + 3x^2 - 12x + 7 = 0$

    $\Leftrightarrow (2x + 7)(x - 1)^2 = 0$

    $\Leftrightarrow x = -\dfrac{7}{2}$ atau $x = 1$

    $\Rightarrow (-\dfrac{7}{2}, 0)$ dan $(1, 0)$
- Tentukan interval-interval ketika fungsi itu naik dan turun.

  $y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6x - 12 = 0$

  $\Leftrightarrow 6(x + 2)(x - 1) = 0$

  $\Leftrightarrow x = -2$ atau $x = 1$

  \+ – +

  –2 1

  Jadi, fungsi naik pada interval $x < -2$ atau $x > 1$

  dan turun pada interval $-2 < x < 1$.
- Tentukan titik-titik kritis.

  $x = -2 \Rightarrow y = 2(-2)^3 + 3(-2)^2 - 12(-2) + 7 = 27$

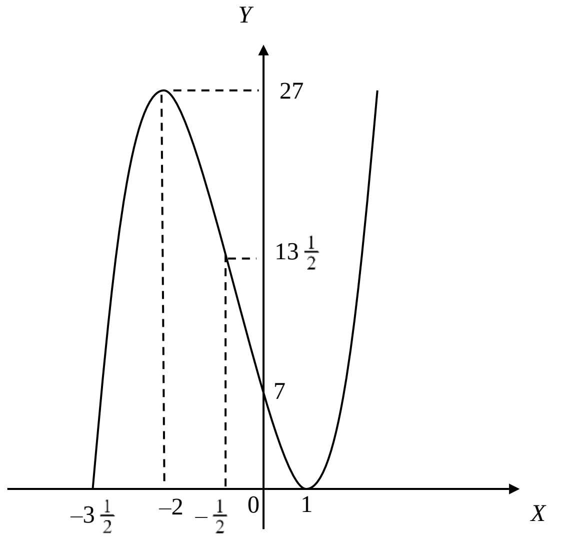
  $x = 1 \Rightarrow y = 2(1)^3 + 3(1)^2 - 12(1) + 7 = 0$

  Jadi, titik balik minimum (1, 0) dan titik balik maksimum (–2, 27)
- Tentukan beberapa titik bantu lainya

  $x = -1 \Rightarrow y = 2(-1)^3 + 3(-1)^2 - 12(-1) + 7 = 20 \Rightarrow (-1, 20)$

  $x = 2 \Rightarrow y = 2(2)^3 + 3(2)^2 - 12(2) + 7 = 11 \Rightarrow (2, 11)$

❖ Sketsa grafik.



2. $y = 8 + 2x^2 - x^4$ **(skor 50)**

❖ Cari perpotongan dengan sumbu-sumbu koordinat.

➢ Titik potong dengan sumbu $Y \Rightarrow x = 0$

$y = 8 + 2(0)^2 - (0)^4 = 8 \Rightarrow (0, 8)$

➢ Titik potong dengan sumbu $X \Rightarrow y = 0$

$8 + 2x^2 - x^4 = 0$

$\Leftrightarrow x^4 - 2x^2 - 8 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 2) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = 4$ atau $x^2 = -2$ (tidak memenuhi)

$x = -2$ atau $x = 2$

$\Rightarrow (-2, 0)$ dan $(2, 0)$

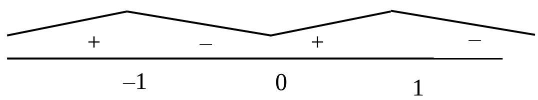
❖ Tentukan interval-interval ketika fungsi itu naik dan turun.

$y' = 0 \Leftrightarrow 4x - 4x^3 = 0$

$\Leftrightarrow 4x(1 - x^2) = 0$

$\Leftrightarrow 4x(1 - x)(1 + x) = 0$

$\Leftrightarrow x = -1$ atau $x = 0$ atau $x = 1$



Jadi, fungsi naik pada interval $x < -1$ atau $0 < x < 1$

dan turun pada interval $-1 < x < 0$ atau $x > 1$.

❖ Tentukan titik-titik kritis.

$x = -1 \Rightarrow y = 8 + 2(-1)^2 - (-1)^4 = 9$

$x = 0 \Rightarrow y = 8 + 2(0)^2 - (0)^4 = 8$

$x = 1 \Rightarrow y = 8 + 2(1)^2 - (1)^4 = 9$

Jadi, titik balik miksimum $(-1, 9)$ dan $(1, 9)$ dan titik balik minimum $(0, 8)$

❖ Tentukan beberapa titik bantu lainya

$x = -3 \Rightarrow y = 8 + 2(-3)^2 - (-3)^4 = \Rightarrow (-3, -55)$

$x = 3 \Rightarrow y = 8 + 2(3)^2 - (3)^4 = \Rightarrow (3, -55)$

❖ Sketsa grafik.