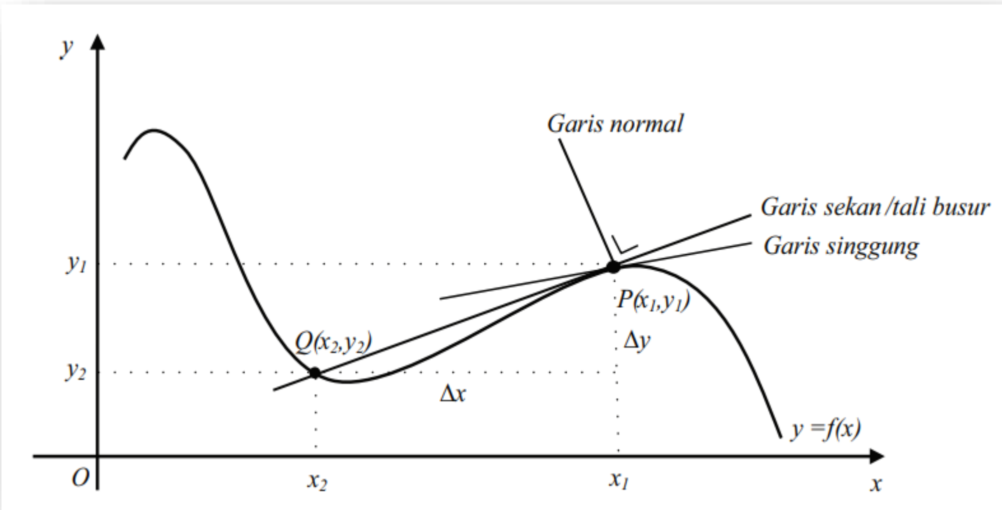
KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
Menemukan Konsep Turunan

A. Tujuan Pembelajaran

Pada pembelajaran kali ini, Ananda akan digiring untuk dapat menemukan konsep turunan secara mandiri. Selain itu juga Ananda akan diajak untuk dapat menentukan turunan fungsi aljabar mulai dari yang paling sederhana sampai ke yang kompleks. Namun tidak usah khawatir, dalam modul ini Ananda akan mempelajarinya secara bertahap untuk memungkinkan Ananda dapat mempelajarinya secara mandiri.

B. Uraian Materi

Untuk menemukan konsep turunan, kita akan mencoba mengamati berbagai permasalahan nyata dan mempelajari beberapa kasus dan contohnya. Kita akan memulainya dengan menemukan konsep garis tangen atau garis singgung. Sebagai ilustrasi perhatikan berikut:

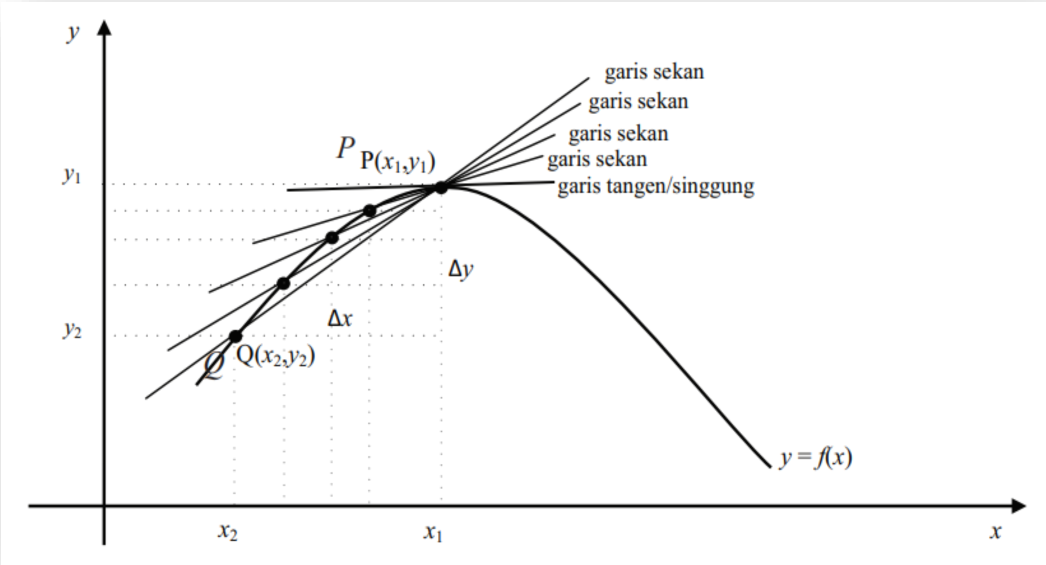


Gambar 1

Misalkan seseorang yang sedang bermain papan seluncur bergerak dari titik Q (x_2, y_2) dan melayang ke udara pada titik P(x_1 , y_1) sehingga ia bergerak dari titik Q mendekati titik P. Garis yang menghubungkan titik Q (x_2 , y_2) dan titik P (x_1 , y_1) disebut tali busur atau garis sekan dengan kemiringan atau gradien $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (Ingat konsep garis lurus).

Jika $\Delta x = x_2 - x_1$ maka $x_2 = \Delta x + x_1$ (Δx merupakan selisih dari x) dan Jika $\Delta y = y_2 - y_1$ makan $y_2 = \Delta y + y_1$

Jika Δx semakin kecil maka Q akan bergerak mendekati P (Jika $\Delta x \to 0$ maka Q $\to$ P).
Sehingga gambar grafiknya dapat diilustrasikan sebagai berikut:



Gambar 2

Jika y = f(x) maka gradien garis sekan PQ adalah:

$$m_{PQ} = \frac{f(x_2) + f\,(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + \Delta x\,) - f(x_1)}{x_1 + \Delta x - x_1} = \frac{f(x_1 + \Delta x\,) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Dari persamaan tersebut, kita dapat menarik definisi:

Misalkan $f : R \to R$ adalah fungsi kontinu dan titik P (x_1, y_1) dan $Q\ (x_1 + \Delta x\,, y_1 + \Delta y)$ pada kurva f. Garis sekan menghubungkan titik P dan Q dengan gradien $m_{sec} = \frac{f\,(x_1 + \Delta x\,) - f\,(x_1\,)}{\Delta x}$

Kita kembali ke gambar kedua yuk, Ananda amati kembali bahwa jika titik Q mendekati P maka $\Delta x \to 0$ sehingga diperoleh garis singgung di titik P dengan gradien :

$m_{PGS} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f\,(x_1 + \Delta x\,) - f(x_1)}{\Delta x}$ jika limitnya ada, nahhh ini yang harus Ananda pahami tentang teori limit. Dari perhitungan matematis ini kita dapatkan definisi kedua mengenai gradien garis singgung yaitu sebagai berikut:

Misalkan f adalah fungsi kontinu bernilai real dan titik $P(x_1, y_1)$ pada kurva f. Gradien garis singgung di titik $P(x_1, y_1)$ adalah limit gradien garis sekan di titik $P(x_1, y_1)$, ditulis: $m_{GS} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} m_{\sec} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$. (Jika limitnya ada)

Contoh soal 1:

Tentukan gradien garis singgung kurva $f(x) = x^2 + 3x - 4$ di titik (2, 6)

Jawab :

$f(x) = x^2 + 3x - 4$

$f(2) = 2^2 + 3\,(2) - 4 = 4 + 6 - 4 = 6$

$f(2 + \Delta x\,) = (2 + \Delta x)^2 + 3\,(2 + \Delta x) - 4$

$= 4 + 4\Delta x + \Delta x^2 + 6 + 3\Delta x - 4 = \Delta x^2 + 7\Delta x + 6$

Menurut rumus : $m_{PGS} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x\,) - f(x_1)}{\Delta x}$

$$m_{PGS} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2 + \Delta x\,) - f(2)}{\Delta x}$$

$$m_{PGS} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2 + 7\Delta x + 6 - 6}{\Delta x}$$

$$m_{PGS} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2 + 7\Delta x}{\Delta x}$$

$$m_{PGS} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{7\Delta x}{\Delta x}$$

$$m_{PGS} = 0 + 7 = 7$$

Jadi gradien garis singgung kurva $f(x) = x^2 + 3x - 4$ di titik (2, 6) sama dengan 7.

Bagaimana Ananda? Bisakah Ananda memahami bagaimana mencari gradien atau kemiringan suatu kurva dengan menggunakan konsep secan? Nahhh lanjut ke pelajaran berikutnya yaitu kita akan mengulas kembali persamaan garis singgung yang pernah Ananda pelajari waktu SMP. Ingat kembali bahwa rumus mencari persamaan garis kurva $y = f(x) di\ titik\ (x_1\,, y_1)$ yaitu :

$$y - y_1 = m_{PGS}\,(x - x_1)$$

Contoh soal 2:

Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = f(x) = x^2 + 4x\ di\ titik\ (-1\,,-3)$.

Jawab:

$f(x) = x^2 + 4x$

Langkah pertama kita cari dulu $f(-1) = (-1)^2 + 4(-1) = 1 - 4 = -3$

Kemudian cari $f(-1 + \Delta x) = (-1 + \Delta x)^2 + 4\,(-1 + \Delta x)$

$= (-1)^2 - 2\Delta x + \Delta x^2 - 4 + 4\Delta x = 1 - 2\Delta x + \Delta x^2 - 4 + 4\Delta x = \Delta x^2 + 2\Delta x - 3$

Maka di dapat :

$$m_{PGS} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(-1 + \Delta x) - f(-1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2 + 2\Delta x - 3 - (-3)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2 + 2\Delta x - 3 + 3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2 + 2\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 0 + 2 = 2$$

Didapat gradien kurva tersebut = 2

Maka Persamaan garis singgung kurva $y = f(x) = x^2 + 4x\ di\ titik\ (-1\,,-3)$. Adalah

$$\boldsymbol{y - y_1 = m_{PGS}\,(x - x_1)}$$
$$\boldsymbol{y - (-3) = 2\,(x - (-1))}$$
$$\boldsymbol{y + 3 = 2\,(x + 1)}$$
$$\boldsymbol{y + 3 = 2x + 2}$$
$$\boldsymbol{y = 2x + 2 - 3}$$
$$\boldsymbol{y = 2x - 1}$$

Atau bentuk lainnya

$$\boldsymbol{y - 2x + 1 = 0}$$

C. Rangkuman

a. Definisi untuk mencari gradien atau kemiringan garis singgung adalah

Misalkan f adalah fungsi kontinu bernilai real dan titik $P(x_1, y_1)$ pada kurva f. Gradien garis singgung di titik $P(x_1, y_1)$ adalah limit gradien garis sekan di titik $P(x_1, y_1)$, ditulis: $m_{GS} = \lim_{\Delta x \to 0} m_{\sec} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$. (Jika limitnya ada)

b. Rumus untuk mencari persamaan garis singgung kurva

$$y - y_1 = m_{PGS}\,(x - x_1)$$

D. Latihan Soal

Kerjakan semua soal di bawah ini di kertas, kemudian cocokkan dengan kunci jawabannya.

1) Tentukan gradien garis singgung kurva $y = 2x^2 + 3x - 5$ di titik (2, 9)

   Jawab: m = 11

2) Gradien garis singgung kurva $y = \ x^3 - 2x$ di titik ((1 , -1)

   Jawab : m = 1

3) Persamaan garis singgung kurva $y = \ x^2 - 2x + 5$ di titik (- 1 , 8) adalah ...

   Jawab : $y + 4x - 4 = 0$

4) Persamaan garis singgung kurva $y = 3x^2 - 5$ di titik (- 2, 7) adalah ...

   Jawab : $y + 12x + 17 = 0$

5) Diketahui garis x + y = a menyinggung parabola $y = \ -\frac{1}{3}x^2 + x + 2$. Nilai a adalah ....

   Jawab: a = 5

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2
SIFAT-SIFAT TURUNAN

A. Tujuan Pembelajaran

Pada pembelajaran kedua, Ananda akan dibimbing untuk dapat menggunakan sifat-sifat turunan yang telah Ananda peroleh pada kegiatan pembelajaran satu. Cara menentukan turunan pertama sebuah fungsi yang terdefinisi di $\mathbb{R}$ Ananda dapat menggunakan definisi turunan atau dapat juga menggunakan rumus umum turunan.

B. Uraian Materi

Konsep turunan merupakan salah satu dari bagian utama kalkulus. Konsep turunan ditemukan oleh **Sir Isaac Newton** (1642 – 1727) dan **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646 – 1716). Bahasa lain dari turunan adalah differensial yang merupakan tingkat perubahan dari suatu fungsi. Turunan dari fungsi $y = f(x)$ dituliskan dengan $y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d(f(x))}{dx}$ (dibaca y aksen sama dengan f aksen x sama dengan $dy\,dx$ sama dengan $d\,f(x)\,dx$, ini dapat diartikan turunan pertama fungsi f terhadap x, atau turunan pertama y. Jika fungsinya dalam $a, f(a)$ maka $f'(a) merupakan\ turunan\ pertama\ f\ terhadap\ a$ dan seterusnya.

Definisi Turunan

Misal $f(x)$ merupakan fungsi yang terdefinisi di $\mathbb{R}$, turunan pertama dari fungsi tersebut didefinisikan sebagai limit dari perubahan rata-rata dari nilai fungsi terhadap variabel x dan ditulis sebagai:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Konsep ini merupakan dasar untuk menentukan turunan suatu fungsi. Atau definisi tersebut dapat dituliskan:

Definisi 1

Misalkan $f: S \to R$ dengan $S \subseteq R$. Fungsi f dapat diturunkan pada S jika dan hanya jika fungsi f dapat diturunkan di setiap titik c di S.

Atau jika terdapat titik c anggota R

Definisi 2

Misalkan fungsi $f: S \to R$, $S \subseteq R$ dengan $(c - \Delta x, c + \Delta x) \subseteq S$. Fungsi f dapat diturunkan di titik c jika dan hanya jika ada $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$.

Definisi 3

Misalkan fungsi $f: S \to R$, $S \subseteq R$ dengan $(c - \Delta x, c + \Delta x) \subseteq S$

- Fungsi f memiliki turunan kanan pada titik c jika dan hanya jika $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$ ada.
- Fungsi f memiliki turunan kiri pada titik c jika dan hanya jika $\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$ ada.

Suatu fungsi akan dapat diturunkan pada suatu titik jika memenuhi sifat berikut:

Sifat turunan fungsi

Misalkan fungsi $f: S \to R$, $S \subseteq R$ dengan $x \in S$ dan $L \in R$. Fungsi f dapat diturunkan di titik x jika dan hanya jika turunan kiri sama dengan turunan kanan, ditulis,

$$f'(x) = L \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = L.$$

Keterangan:

1. $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ adalah turunan fungsi f di titik x yang didekati dari kanan pada domain S.
2. $\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ adalah turunan fungsi f di titik x yang didekati dari kiri pada domain S.

Contoh Soal:

Dengan menggunakan konsep turunan, tentukan turunan pertama dari :

1. $f(x) = 10$

   Jawab:

   Karena $f(x) = 10$ merupakan fungsi konstan (tetap) maka $f\ (x + \Delta x) = 10\ (tetap)$

   $$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{10-10}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

2. $f(x) = 3x + 5$

   Jawab:

   $$f(x) = 3x + 5\ maka\ f(x+\Delta x) = 3\ (x + \Delta x) + 5 = 3x + 3\Delta x + 5$$

   $$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(x+\Delta x) + 5 - (3x+5)}{\Delta x}$$

   $$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x + 3\Delta x + 5 - 3x - 5}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 3 = 3$$

3. $f(x) = 5x^2 + 3$

   Jawab:

   $$f(x+\Delta x) = 5\ (x+\Delta x)^2 + 3 = 5\ (x^2 + 2x.\Delta x + \Delta x^2) + 3$$
   $$= 5x^2 + 10x.\Delta x + 5\Delta x^2 + 3$$

   $$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5x^2 + 10x.\Delta x + 5\Delta x^2 + 3 - (5x^2+3)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5x^2 + 10x\Delta x + 5\Delta x^2 + 3 - 5x^2 - 3}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{10x.\Delta x + 5\Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{10x.\Delta x}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5\Delta x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} 10x + \lim_{\Delta x \to 0} 5\Delta x = 10x + 0 = 10x \end{aligned}$$

   Sekarang marilah kita perhatikan ketiga contoh tersebut lalu kita tarik kesimpulan. Untuk contoh pertama, fungsi yang diberikan adalah fungsi konstan, menghasilkan turunan pertama sama dengan nol. Contoh soal kedua adalah fungsi linear menghasilkan turunan pertama koefisiennya, dan contoh soal ketiga adalah fungsi kuadrat, nahh perhatikan bahwa koefisien dari x pangkat dua adalah 5 dan pangkat dari x adalah 2, kalikan 5 dengan 2 didapat 5(2) = 10, hasil akhir berpangkat satu maka 2 – 1 = 1. Dari sini kita tarik kesimpulan bahwa:

- **Untuk fungsi konstan mempunyai bentuk umum $f(x) = c$, dengan c adalah konstanta bilangan Real.**

$$\textbf{Jika } f(x) = c; maka\ f'(x) = 0$$

- **Untuk fungsi linear mempunyai bentuk umum $y = ax + b$, dengan a dan b anggota bilangan Real.**

$$Jika\ f(x) = ax + b\ maka\ f'(x) = a$$

- **Untuk fungsi kuadrat mempunyai bentuk umum $y = ax^n$, dengan a anggota bilangan Real dan n pangkat/eksponen**

$$Jika\ f(x) = ax^n\ maka\ f'(x) = ax^{n-1}$$

Nahhh setelah Ananda merumuskan rumus umum turunan seperti di atas, maka dapat Ananda lihat untuk pengerjaan soal turunan dapat langsung menggunakan rumus tersebut.

Contoh. Tentukan turunan pertama dari

a) $y = 100$
   Jawab $y' = 0$
b) $y = 19x - 5$
   Jawab $y' = 19$
c) $y = 6x^3$
   Jawab : $y' = 6(3)^{3-1} = 18x^2$
d) $f(x) = 5\sqrt[3]{x^2}$
   Jawab: Untuk menjawab soal ini kita harus mengubah bentuk akar ke dalam bentuk pangkat pecahan.

$$f(x) = 5\sqrt[3]{x^2} = 5x^{\frac{2}{3}}$$

Jadi Ananda punya koefisien = 5, pangkat = 2/3

$$\text{Maka } f'(x) = 5(\tfrac{2}{3})x^{\frac{2}{3}-1}$$

$$f'(x) = \frac{10}{3}x^{\frac{2}{3}-\frac{3}{3}} = \frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{10}{3\sqrt[3]{x}}$$

e) $f(x) = 2x - 15$
Jawab : Fungsi tersebut adalah fungsi linear maka $f'(x) = 2$

f) $f(x) = 2x^3 - 21x^2 - 12x + 10$
Jawab :
$f'(x) = 2(3)x^{3-1} - 21(2)x^{2-1} - 12(1)x^{1-1} + 0$
$f'(x) = 6x^2 - 42x - 12$

g) $f(x) = (2x+3)(x^3 - 2x^2)$
Jawab:
Perhatikan bahwa soal ini merupakan perkalian dua fungsi berbeda, yaitu fungsi $2x + 3\ dan\ \ x^3 - 2x^2$. Untuk menjawab soal ini Ananda dapat mengalikan satu persatu tiap komponen fungsi terlebih dahulu, ini tidak sulit karena masing-masing fungsi yang berada di dalam kurung berpangkat satu. Setelah dikalikan maka fungsi $f(x)$ menjadi:

$f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 3x^3 - 6x^2$
$f(x) = 2x^4 - x^3 - 6x^2$

Setelah ini baru kita turunkan
$f'(x) = 2(4)x^{4-1} - 1(3)x^{3-1} - 6(2)x^{2-1}$
$f'(x) = 8x^3 - 3x^2 - 12x$

Nahhh bagaimana setelah Ananda belajar sampai contoh terakhir ini..? mudah bukan mempelajari konsep turunan? Jadi kalo udah ketemu rumus umum turunannya, Ananda gak perlu lagi pakai konsep limit dalam mencari turunan pertama. Langsung aja pakai tuh rumusnya. Oke.. ?? semangattt...

ATURAN RANTAI

Ananda perhatikan contoh soal bagian g). Seandainya fungsi $f(x)$ tersebut berpangkat lebih dari dua, tentu akan repot bagi Ananda melakukan perkaliannya.

CONTOH SOAL 1. Tentukan turunan pertama dari :

$f(x) = (2x+3)^3$
Nahh cara menyelesaikan soal ini Ananda memisalkan,
Misal: $u = 2x + 3$
Maka $u' = \frac{du}{dx} = 2$ notasi leibniz
Fungsi di atas kita ganti dengan u sehingga:

$f(x) = u^3$
$f'(x) = 3\,u^2 \frac{du}{dx} = 3u^2\ (2) = 6u^2 = 6\,(2x+3)^2$

CONTOH SOAL 2. Tentukan $f'(x)$ dari:
$f(x) = (3x-5)\sqrt[3]{4x-10}$

Jawab:

Misal $u = 3x-5$ $\quad v = \sqrt[3]{4x-10} = (4x-10)^{\frac{1}{3}}$

$u' = 3$ $\quad v' = \frac{1}{3}(4x-10)^{\frac{1}{3}-1}.(4) = \frac{4}{3}(4x-10)^{\frac{1}{3}-\frac{3}{3}}$

$= \dfrac{4}{3}(4x-10)^{-\frac{2}{3}}$

$f'(x) = u'v + uv'$

$f'(x) = 3\,.(4x-10)^{\frac{1}{3}} + (3\text{x}-5).\dfrac{4}{3}(4x-10)^{-\frac{2}{3}}$

$f'(x) = (4x-10)^{\frac{1}{3}}(3 + \frac{4}{3}(3x-5)(4x-10)^{-1})$

C. Rangkuman

Berdasarkan paparan di atas, berikut merupakan rumus-rumus umum turunan yang dapat Ananda ingat dan gunakan dalam menyelsaikan soal turunan. Misalkan f , u, v adalah fungsi bernilai real dan dapat diturunkan di interval I dan a adalah bilangan real, maka:

1. $f(x) = a \rightarrow f'(x) = 0$
2. $f(x) = ax \rightarrow f'(x) = \mathrm{a}$
3. $f(x) = ax^n \rightarrow f'(x) = n \cdot ax^{n-1}$
4. $f(x) = au(x) \rightarrow f'(x) = au'(x)$
5. $f(x) = u(x) \pm v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$
6. $f(x) = u(x)v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
7. $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)} \rightarrow f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$

D. Latihan Soal

Jawablah pertanyaan di bawah ini dengan benar dan teliti yaa

1. Jika diketahui $f(r) = 2r^{\frac{3}{2}} - 2r^{\frac{1}{2}}$, maka nilai dari $f'(1) = \cdots$

2. Sebuah persegi dengan sisi x memiliki luas $f(x)$. Nilai $f'(6) = \cdots$
   Jawab:

3. Besar populasi di suatu daerah t tahun mendatang ditentukan oleh persamaan $p(t) = 10^3 t^2 - 5.10^2 t + 10^6$. Laju pertumbuhan penduduk 5 tahun mendatang adalah..

4. Dua bilangan bulat m dan n memenuhi hubungan $2m - n = 40$. Nilai minimum dari p = $m^2 + n^2$ adalah ...

5. Diberikan fungsi $f(x) = ax^2 + bx + c$ Jika $f'(0) = 2, dan\ f(2) = 6$

   Tentukan nilai a, b dan c.