KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
PENGERTIAN DAN OPERASI ALJABAR PADA POLINOMIAL

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini diharapkan siswa dapat :
1. memahami pengertian polinomial,
2. menentukan operasi penjumlahan pada polinomial,
3. menentukan operasi pengurangan pada polinomial,
4. menentukan operasi perkalian pada polinomial,
5. menentukan kesamaan polinomial,
6. menentukan nilai polinomial.

B. Uraian Materi

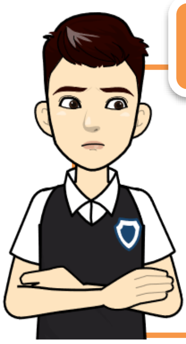
1. Pengertian Polinomial

Polinomial atau suku banyak adalah suatu bentuk aljabar yang terdiri atas beberapa suku dan memuat satu variabel berpangkat bulat positif. Secara umum, polinomial dalam x dan berderajat n dapat dituliskan sebagai berikut.

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{x-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

dengan :
n merupakan bilangan bulat positif , $a_n \neq 0$
$a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1$ bilangan real dan merupakan koefisien-koefisien polinomial
a_0 bilangan real dan merupakan suku tetap (konstanta)
Derajat suatu polinomial dalam x adalah pangkat tertinggi dari x dalam polinomial itu.

Anak-anakku untuk lebih memahami bentuk dari polinomial, mari kita perhatikan contoh soal 1 dan contoh soal 2 berikut.



Contoh Soal 1

Manakah bentuk berikut yang merupakan polinomial !
a. $6x^2 + 3x + 5 + 4x^3$
b. $8x^3 + 4x^2 - 2x + 1 + \frac{3}{x}$
c. $2x^4 - 7x^3 + 8x - 4$
d. $5x^3 + 2x^2 + 3\sqrt{x} + 1$

Pembahasan:
Anak-anakku untuk menentukan yang merupakan polinomial, mari kita ingat kembali bentuk umum polinomial berikut.

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{x-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Berdasarkan bentuk umum polinomial, mari kita identifikasi manakan yang termasuk polinomial dari beberapa bentuk aljabar berikut.

a. $6x^2 + 3x + 5 + 4x^3$ merupakan polinomial karena dapat dinyatakan dalam bentuk $4x^3 + 6x^2 + 3x + 5$ dimana semua variabel x berpangkat bilangan asli.
b. $8x^3 + 4x^2 - 2x + 1 + \frac{3}{x}$ bukan merupakan polinomial, karena terdapat variabel x yang berpangkat bukan bilangan bulat positif (bilangan asli), yaitu $\frac{3}{x} = 3x^{-1}$ (x memiliki pangkat negatif)
c. $2x^4 - 7x^3 + 8x - 4$ merupakan polinomial karena dapat dinyatakan dalam bentuk $2x^4 - 7x^3 + 0x^2 + 8x - 4$ dimana semua variabel x berpangkat bilangan asli
d. $5x^3 + 2x^2 + 5x + 3\sqrt{x} + 1$, bukan polinomial, karena terdapat variabel x yang berpangkat bukan bilangan bulat positif, yaitu $3\sqrt{x} = 3x^{\frac{1}{2}}$ (x berpangkat pecahan)

Contoh Soal 2

Susun suku banyak $5x + 7 + x^4 - 6x^3$ dalam pangkat turun, kemudian nyatakan :
a. Suku-suku berikut koefisiennya
b. Derajat dan konstantanya.

Pembahasan:
Suku banyak $f(x) = 5x + 7 + x^4 - 6x^3$ dalam pangkat turun dinyatakan $f(x) = x^4 - 6x^3 + 0x^2 + 5x + 7$ x^2 diberi koefisien 0 karena semual tidak terdapat dalam $f(x)$

a. Suku-suku $f(x)$ beserta koefisiennya sebagai berikut :
Suku x^4 dengan koefisien = 1
Suku – $6x^3$ dengan koefisien = – 6
Suku $0x^2$ dengan koefisien = 0
Suku 5x dengan koefisien = 5
7 adalah konstanta
b. Suku dengan pangkat variabel paling tinggi adalah suku x^4, sehingga $f(x)$ merupakan suku banyak berderajat empat. Adapun konstantanya = 7.

2. Operasi Aljabar pada Polinomial

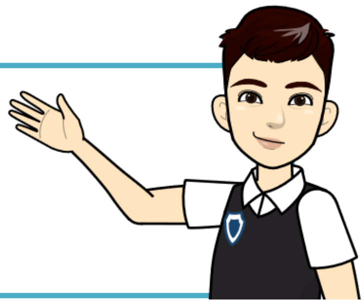
Sifat-sifat pada operasi bilangan real juga berlaku pada operasi polinomial karena polinomial memuat variabel yang merupakan suatu bilangan real yang belum diketahui nilainya. Sifat-sifat tersebut meliputi sifat komutatif, asosiatif, dan distributif yang akan membantu kita dalam menyelesaikan operasi aljabar pada polinomial.

Sifat Distributif :
$$5x^2 - 2x^2 = (5-2)x^2$$
$$= 3x^2$$

Sifat Komutatif dan Asosiatif
$$2x^2 \times 3x^3 = (2 \times 3)x^{2+3}$$
$$= 6x^5$$

a. Penjumlahan dan Pengurangan
Penjumlahan dan pengurangan polinomial dilakukan dengan cara menjumlahkan atau mengurangkan antarkoefisien suku-suku sejenis. Suku-suku sejenis yaitu suku-suku yang mempunya variabel berpangkat sama. Untuk lebih memahami penjumlahan dan pengurangan pada polinomial, kita simak contoh soal berikut.

Contoh Soal 1

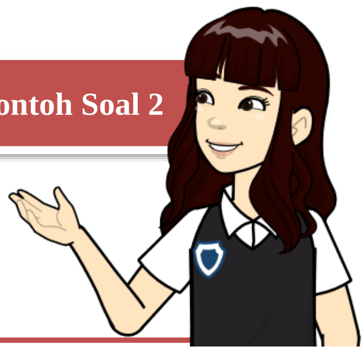


Diketahui polinomial :
$p(x) = 6x^3 - 8x^2 + 7x + 10$
$q(x) = 10x^2 + 11x - 13$
Hasil penjumlahan polinomial $p(x)$ dan $q(x)$ adalah ...

Pembahasan:
Diketahui:
$p(x) = 6x^3 - 8x^2 + 7x + 10$
$q(x) = 10x^2 + 11x - 13$
Penjumlahan $p(x)$ dan $q(x)$ dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= (6x^3 - 8x^2 + 7x + 10) + (10x^2 + 11x - 13) \\ &= 6x^3 + (-8x^2 + 10x^2) + (7x + 11x) + (10 - 13) \rightarrow \boxed{\text{Mengelompokkan suku sejenis}} \\ &= 6x^3 + (-8 + 10)x^2 + (7 + 11)x + (-3) \rightarrow \boxed{\text{Sifat distributif}} \\ &= 6x^3 + 2x^2 + 18x - 3 \end{aligned}$$

Contoh Soal 2



Diketahui polinomial :
$g(y) = 10y^3 + 7y^2 - 4y - 2$
$h(y) = 5y^3 - 2y + 3$
Hasil pengurangan polinomial $g(y)$ dan $h(y)$ adalah ...

Pembahasan:
Diketahui:
$g(y) = 10y^3 + 7y^2 - 4y - 2$
$h(y) = 5y^3 - 2y + 3$
Pengurangan $g(y)$ dan $h(y)$ dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} g(y) - h(y) &= (10y^3 + 7y^2 - 4y - 2) - (5y^3 - 2y + 3) \\ &= 10y^3 + 7y^2 - 4y - 2 - 5y^3 + 2y - 3 \\ &= (10y^3 - 5y^3) + 7y^2 + (-4y + 2y) + (-2 - 3) \rightarrow \boxed{\text{Mengelompokkan suku sejenis}} \\ &= (10 - 5)y^3 + 7y^2 + (-4 + 2)y + (-5) \rightarrow \boxed{\text{Sifat distributif}} \\ &= 5y^3 + 7y^2 + (-2)y - 5 \\ &= 5y^2 + 7y^2 - 2y - 5 \end{aligned}$$

b. Perkalian

Anak-anakku untuk mempermudah kita melakukan perkalian polinomial kita bisa menggunakan sifat distributif seperti berikut.

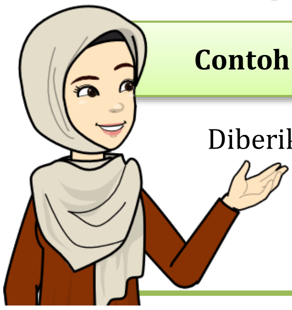
$$a \cdot (b + c + \cdots + k) = a \cdot b + a \cdot c + \cdots + a \cdot k$$
$$(b + c + \cdots + k) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a + \cdots + k \cdot a$$

Secara umum, kita dapat mengalikan polinomial derajat m dengan polinomial derajat n sebagai berikut.

$$\left(a^m + bx^{m-1} + \cdots\right)\left(Ax^n + Bx^{n-1} + \cdots\right) = a \cdot Ax^{m+n} + b \cdot Bx^{m+n-2} + \cdots$$

Hal ini berarti ketika mengalikan dua polinomial, kita menerapkan sifat-sifat perpangkatan yang telah dipelajari, **yaitu $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$**

Untuk memahami perkalian pada polinomial, yuk kita perhatikan contoh soal berikut.



Contoh Soal

Diberikan dua buah suku banyak $f(x)$ dan $g(x)$ yang ditentukan oleh

$$f(x) = x^3 + x^2 - 3x + 1$$
$$g(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$$

Tentukan $f(x) \cdot g(x)$ serta derajatnya !

Pembahasan:

Diketahui:

$f(x) = x^3 + x^2 - 3x + 1$

$g(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$

Maka $f(x) \cdot g(x)$ dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
f(x) \cdot g(x) &= (x^3 + x^2 - 3x + 1) \cdot (x^3 - 2x^2 + 2x - 1) \\
&= x^3(x^3 - 2x^2 + 2x - 1) + x^2(x^3 - 2x^2 + 2x - 1) - 3x(x^3 - 2x^2 + 2x - 1) \\
&\quad + 1(x^3 - 2x^2 + 2x - 1) \\
&= x^6 - 2x^5 + 2x^4 - x^3 + x^5 - 2x^4 + 2x^3 - x^2 - 3x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 3x + x^3 \\
&\quad - 2x^2 + 2x - 1 \\
&= x^6 + (-2x^5 + x^5) + (2x^4 - 2x^4 - 3x^4) + (-x^3 + 2x^3 + 6x^3 + x^3) \\
&\quad + (-x^2 - 6x^2 - 2x^2) + (3x + 2x) - 1 \\
&= x^6 + (-2 - 1)x^5 + (2 - 2 - 3)x^4 + (-1 + 2 + 6 + 1)x^3 + (-1 - 6 - 2)x^2 \\
&\quad + (3 + 2)x - 1 \\
&= x^6 - 3x^5 - 3x^4 + 8x^3 - 9x^2 + 5x - 1
\end{aligned}$$

Jadi, $f(x) \cdot g(x) = x^6 - 3x^5 - 3x^4 + 8x^3 - 9x^2 + 5x - 1$ dengan derajat polinomial adalah 6 karena pangkat tertinggi dari variabel adalah 6

Berdasarkan uraian pada contoh soal dapat disimpulkan sebagai berikut.

Misalkan $f(x)$ polinomial berderajat m dan $g(x)$ polinomial berderajat n maka **Derajat dari $[f(x) \cdot g(x)]$** adalah $(m + n)$

3. Kesamaan Polinomial

Dua polinomial berderajat n dalam variabel x yaitu $f(x)$ dan $g(x)$ dikatakan sama jika kedua suku banyak itu mempunyai nilai yang sama untuk variabel x. Kesamaan polinomial $f(x)$ dan $g(x)$ dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\boldsymbol{f(x) \equiv g(x)}$$

Anak-anakku, secara matematis kesamaan suku banyak dapat dituliskan sebagai berikut.

Misalkan dua suku banyak berderajat n,

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$
$$g(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0$$

$f(x)$ sama dengan $g(x)$, ditulis $f(x) \equiv g(x)$ jika dan hanya jika $a_n = b_n$, $a_{n-1} = b_{n-1}, a_{n-2} = b_{n-2}, \ldots, a_1 - b_1, a_0 = b_0$

Koefisien dari variabel berpangkat sederajat adalah sama

Untuk lebih memahami kesamaan suku banyak, yuk kita simak beberapa contoh soal berikut.

Contoh Soal 1:

Diketahui suku banyak $Ax^2 + Bx + C$ sama dengan $6x^2 - 4x + 3$. Tentukan nilai koefisien A, B dan C !

Pembahasan:

$Ax^2 + Bx + C \equiv 6x^2 - 4x + 3$ jika dan hanya jika koefisien x^2, x, dan konstanta pada ruas kiri dan ruas kanan adalah sama.

Koefisien x^2: $A = 6$;
koefisien x : $B = -4$ B = – 4 ;
konstanta : $C = 3$
Jadi, $A = 6$, $B = -4$, dan $C = 3$

Contoh Soal 2:

Diketahui $x^3 + 2x^2 - 4x + 7 \equiv ax(x+1)^2 + b(x-2) + c$ untuk semua x. Nilai a, b, dan c adalah ...

Pembahasan:

Samakan koefisien suku sejenis di ruas kiri dan ruas kanan.

$$\begin{aligned} x^3 + 2x^2 - 4x + 7 &= ax(x+1)^2 + b(x-2) + c \\ &= ax(x^2 + 2x + 1) + bx - 2b + c \\ &= (ax \cdot x^2) + (ax \cdot 2x) + (ax \cdot 1) + bx - 2x + c \\ &= ax^3 + 2ax^2 + ax + bx - 2b + c \\ &= ax^3 + 2ax^2 + (a+b)x + (-2b + c) \end{aligned}$$

Jadi kesamaan suku banyak adalah

$x^3 + 2x^2 - 4x + 7 \equiv ax^3 + 2ax^2 + (a+b)x + (-2b + c)$

Koefisien x^3 : $1 = a \rightarrow \boldsymbol{a = 1}$

Koefisien x : $-4 = a + b \rightarrow a + b = -4$ mencari nilai b dengan mensubstitusi $a = 1$ ke $a + b = -4$ diperoleh

$1 + b = -4$
$b = -4 - 1$
$\boldsymbol{b = -5}$

Konstanta : $7 = -2b + c \rightarrow -2b + c = 7$ substitusi $b = -5$ untuk memperoleh nilai c

$$\begin{aligned} -2b + c &= 7 \\ -2(-5) + c &= 7 \\ 10 + c &= 7 \\ c &= 7 - 10 \\ \boldsymbol{c} &= \mathbf{-3} \end{aligned}$$

Jadi, nilai $a = 1, b = -5$, dan $c = -3$

Contoh Soal 3:

Berdasarkan kesamaan berikut tentukan nilai a dan b

$\frac{2x+10}{x^2-2x-8} \equiv \frac{a}{x-4} + \frac{b}{x+2}$

Pembahasan:

Samakan koefisien suku sejenis di ruas kiri dan ruas kanan.

$$\frac{2x + 10}{x^2 - 2x - 8} \equiv \frac{a}{x - 4} + \frac{b}{x + 2}$$

$$\frac{2x + 10}{x^2 - 2x - 8} \equiv \frac{a(x + 2)}{(x - 4)(x + 2)} + \frac{b(x - 4)}{(x + 2)(x - 4)}$$

Samakan penyebut menjadi $x^2 - 2x - 8$

$$\frac{2x + 10}{x^2 - 2x - 8} \equiv \frac{ax + 2a}{x^2 - 2x - 8} + \frac{bx - 4b}{x^2 - 2x - 8}$$

$$\frac{2x + 10}{x^2 - 2x - 8} \equiv \frac{ax + bx + 2a - 4b}{a^2 - 2x - 8}$$

Kelompokkan suku sejenis

$$\frac{2x + 10}{x^2 - 2x - 8} \equiv \frac{(a + b)x + (2a - 4b)}{a^2 - 2x - 8}$$

Sifat distributif

Berdasarkan kesamaan polinomial di atas diperoleh dua persamaan sebagai berikut.

$2 = a + b \rightarrow \boldsymbol{a + b = 2}$ persamaan (i)

$10 = 2a - 4b \rightarrow 2a - 4b = 10 \rightarrow \boldsymbol{a - 2b = 5}$ persamaan (ii)

Untuk mencari nilai a dan b eliminasi persamaan (i) dan (ii) sebagai berikut

$$\begin{aligned} a + b &= 2 \\ \underline{a - 2b} &\underline{= 5\ -} \\ 3b &= -3 \\ \boldsymbol{b} &= \mathbf{-1} \end{aligned}$$

Substitusi $b = -1$ untuk mencari nilai a ke persamaan $a + b = 2$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} a + b &= 2 \\ a + (-1) &= 2 \\ a - 1 &= 2 \\ a &= 2 + 1 \\ \boldsymbol{a} &= \mathbf{3} \end{aligned}$$

Jadi, nilai $a = 3$ dan $b = -1$

4. Nilai Polinomial

Suatu polinomial atau suku banyak dapat dinyatakan dalam bentuk fungsi $f(x)$, yaitu:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{x-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Jika suatu suku banyak dinyatakan sebagai fungsi $f(x)$ dan nilai x diganti dengan bilangan tetap k, maka bentuk $f(k)$ merupakan nilai suku banyak tersebut untuk $x = k$. Untuk menentukan nilai dari $f(k)$ kita bisa menggunakan metode substitusi dan metode sintetik yaitu skema Horner.

a. Metode Substitusi

Cara menentukan nilai suatu suku banyak dengan metode substitusi adalah sebagai berikut.

Nilai suku banyak

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{x-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Untuk $x = k$ ditentukan oleh

$$f(k) = a_n(k)^n + a_{n-1}(k)^{n-1} + a_{n-2}(k)^{x-2} + \cdots + a_2(k)^2 + a_1(k) + a_0$$

Anak-anakku untuk lebih memahami menentukan nilai suku banyak dengan metode substitusi, yuk kita simak contoh soal berikut.

Contoh Soal :

Diketahui suku banyak $f(x) = x^3 - 2x^2 - x - 5$. Nilai $f(x)$ untuk $x = 3$ adalah ...

Pembahasan:

Substitusi nilai $x = 3$ ke $f(x) = x^3 - 2x^2 - x - 5$ diperoleh

$$\begin{aligned} f(3) &= 3^3 - 2(3)^2 - 3 - 5 \\ &= 27 - 2(9) - 8 \\ &= 27 - 18 - 8 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Jadi, nilai $f(x)$ untuk $x = 3$ adalah 1

b. Skema Horner

Misalkan suku banyak $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ akan ditentukan nilainya untuk $x = k$ dengan cara skema.

Terlebih dahulu bentuk suku banyak tersebut disederhanakan sehingga setiap variabel x hanya berpangkat satu (kecuali untuk a_0), sehingga diperoleh,

$f(x) = (a_3x + a_2)x + a_1)x + a_0$

Nilai $f(x)$ untuk $x = k$ dapat ditentukan sebagai berikut :

$$f(k) = (a_3k + a_2)k + a_1)k + a_0$$

Bentuk tersebut dapat disusun dalam suatu bagan sebagai berikut :

$$\begin{array}{c|cccc} k & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ & & a_3k & (a_3k + a_2)k & ((a_3k + a_2)k + a_1)k \\ \hline & a_3 & (a_3k + a_2) & ((a_3k + a_2)k + a_1) & \underbrace{((a_3k + a_2)k + a_1)k + a_0}_{\text{Nilai f(k)}} \end{array} +$$

Keterangan :

1). Kalikan a_3 dengan k, lalu tambah dengan a_2
2). Kalikan hasil pada no. (1) dengan k, lalu tambah dengan a_1
3). Kalikan hasil pada no. (2) dengan k, lalu tambah dengan a_0. Hasilnya yang terakhir adalah nilai dari suku banyak $f(x)$ untuk $x = k$ atau $f(k)$.
Anak-anakku untuk memahami menentukan nilai suku banyak menggunakan skema Horner, yuk perhatikan contoh berikut.

Contoh Soal 1:

Tentukan nilai suku banyak $f(x) = 5x^4 - 3x^3 - 7x^2 = 2x + 3$ untuk $x = 1$

Pembahasan:

1	5	– 3	– 7	2	3	
		5(1)	2(1)	– 5(1)	– 3(1)	+
	5	2	– 5	– 3	0	

Jadi, Nilai $f(1) = 1$

Contoh Soal 2:

Tentukan nilai suku banyak $f(x) = 5 - x^2 + 3x^4$ untuk $x = -1$

Pembahasan:
Pertama, ubah $f(x)$ menjadi bentuk pangkat turun sebagai berikut :

$$f(x) = 3x^4 + 0x^3 - x^2 + 0x + 5$$

–1	3	0	– 1	0	5	
		3(–1)	–3(–1)	2(–1)	–2(–1)	+
	3	–3	2	–2	7	

Jadi, nilai $f(-1) = 7$

C. Rangkuman

1. **Polinomial** atau suku banyak adalah suatu bentuk aljabar yang terdiri atas beberapa suku dan memuat satu variabel berpangkat bulat positif. Secara umum, polinomial dalam x dan berderajat n dapat dituliskan sebagai berikut
$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{x-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$
dengan :
n merupakan bilangan bulat positif , $a_n \neq 0$
$a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1$ bilangan real dan merupakan koefisien-koefisien polinomial
a_0 bilangan real dan merupakan suku tetap (konstanta)
2. **Derajat** suatu polinomial dalam x adalah pangkat tertinggi dari x dalam polinomial itu
3. Operasi aljabar pada polinomial terdiri atas penjumlahan, pengurangan dan perkalian.
   a. Penjumlahan dan pengurangan
   Penjumlahan dan pengurangan polinomial dilakukan dengan cara menjumlahkan atau mengurangkan antarkoefisien suku-suku sejenis. Suku-suku sejenis yaitu suku-suku yang mempunya variabel berpangkat sama.
   b. Perkalian

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2
PEMBAGIAN POLINOMIAL

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 2 ini diharapkan siswa dapat :
1. menentukan pembagian polinomial oleh bentuk linear $(x - k)$,
2. menentukan pembagian polinomial oleh bentuk linear $(ax + b)$,
3. menentukan pembagian polinomial oleh bentuk kuadrat $ax^2 + bx + c$,
4. menentukan sisa pembagian dengan teorema sisa,
5. menentukan faktor polinomial dengan teorema faktor.

B. Uraian Materi

Pembagian Polinomial

Pembagian polinomial dapat ditinjau sebagai pembagian bilangan bulat. Perhatikan pembagian bilangan bulat berikut.

$$\begin{array}{rrrl} & & 85 & \longleftarrow \text{hasil bagi} \\ \text{pembagi} \longrightarrow & 3 \,\big) & 257 & \longleftarrow \text{bilangan yang dibagi} \\ \hline & & 17 & \\ & & 15 \; - & \\ \hline & & 2 & \longleftarrow \text{sisa} \end{array}$$

Proses pembagian tersebut berhenti ketika sisa (2) lebih kecil dari pembaginya (3).
Hasil pembagian tersebut dapat dituliskan:

$$257 = (3 \times 85) + 2$$

Secara umum ditulis:

Bilangan yang dibagi = (pembagi × hasil bagi) + sisa

Proses pembagian bilangan bulat di atas juga berlaku pada suku banyak. Misalkan suku banyak f(x) dibagi oleh p(x) menghasilkan h(x) dan sisanya s(x), maka dapat ditulis :

$$\boldsymbol{f(x) = p(x) \cdot h(x) + s(x)}$$

Proses pembagian suku banyak dapat dilakukan dengan 2 cara, yaitu :
a. cara bersusun, dan
b. cara sintetik (cara Horner)

1. Pembagian polinomial oleh bentuk linear $(x - k)$

Pembagian polinomial $f(x)$ dengan pembagi $(x - k)$ menghasilkan hasil bagi $h(x)$ dan sisa $s(x)$ berderajat nol atau $s(x) =$ konstanta, dituliskan sebagai berikut.

$$f(x) = (x - k) \cdot h(x) + s(x)$$

Anak-anakku untuk lebih memahami pembagian polinomial oleh $(x - k)$, yuk kita perhatikan beberapa contoh soal berikut.

Contoh Soal

Tentukan hasil bagi dan sisa pembagian dari $(3x^3 - 7x^2 - 13x - 8) : (x - 4)$, kemudian nyatakan $f(x)$ dalam bentuk $f(x) = (x - k)\,h(x) + s$ dengan :

a. cara bersusun
b. cara Horner

Pembahasan:

a. Cara bersusun

$$
\begin{array}{r|l}
 & \boxed{3x^2 + 5x + 7} \longleftarrow \text{Hasil bagi} = h(x) \\
\text{Pembagi} \longrightarrow \boxed{x-4} & 3x^3 - 7x^2 - 13x - 8 \\
 & \underline{3x^3 - 12x^2} \quad - \\
 & \quad 5x^2 - 13x \\
 & \quad \underline{5x^2 - 20x} \quad - \\
 & \qquad 7x - 8 \\
 & \qquad \underline{7x - 28} \quad - \\
 & \qquad\quad 20 \longleftarrow \text{sisa (s)}
\end{array}
$$

Jadi, $3x^3 - 7x^2 - 13x - 8 = (x - 4)(3x^2 + 5x + 7) + 20$

b. Cara Horner

Pembagian suku banyak dengan cara Horner (sintetik) mirip dengan penentuan nilai suku banyak dengan cara bagan /skema, yaitu dengan mendaftar koefisien-koefisien suku banyak yang dibagi secara berurutan dari pangkat yang tertinggi.

$(3x^3 - 7x^2 - 13x - 8) : (x - 4) \Rightarrow$ pembagi $x - 4$, dalam bagan ditulis $x = 4$

$$
\begin{array}{c|cccc l}
4 & 3 & -7 & -13 & -8 & \longrightarrow \text{koefisien } f(x) \\
 & & 12 & 20 & 28 & \longrightarrow \text{hasil kali dengan 4} \\
\hline
 & 3 & 5 & 7 & 20 & \longleftarrow \text{Sisa (s) atau } f(4)
\end{array}
$$

4: nilai $x = k$

$\underbrace{3 \quad 5 \quad 7}_{\text{koefisien hasil bagi } h(x)}$

Dari pembagian dengan cara Horner diperoleh:
Hasil bagi : $h(x) = 3x^2 + 5x + 7$
Sisa pembagian : $s = 20$
Maka dapat ditulis,

$$3x^3 - 7x^2 - 13x - 8 = (x - 4)(3x^2 + 5x + 7) + 20$$

2. Pembagian Suku Banyak oleh Bentuk Linear $(ax + b)$

Anak-anakku pada uraian materi di atas dijelaskan bahwa jika polinomial $f(x)$ dibagi $(ax + b)$ memberikan hasil bagi $h(x)$ dan sisa s, maka diperoleh hubungan:

$$\boxed{f(x) = (x - k)h(x) + s}$$

Jika $k = -\frac{b}{a}$, hubungan di atas menjadi:

$$f(x) = \left(x + \frac{b}{a}\right) h(x) + s$$

$$f(x) = \frac{1}{a}(ax + b)h(x) + s$$

$$f(x) = (ax + b)\frac{h(x)}{a} + s$$

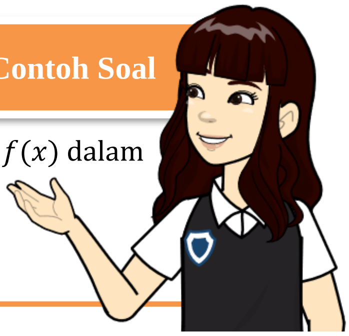
Berdasarkan uraian di atas, diperoleh:

Hasil bagi $f(x)$ oleh $(ax + b)$ adalah $\frac{h(x)}{a}$

Sisa pembagian s adalah $f\left(-\frac{b}{a}\right)$

Untuk lebih memahami pembagian polinomial oleh $(ax + b)$, mari kita simak contoh soal berikut.

Contoh Soal



Tentukan hasil bagi dan sisa pembagian dari $f(x)$ $(3x^4 - 5x^3 + 7x^2 + 5x + 2) : (3x + 1)$, kemudian nyatakan $f(x)$ dalam bentuk $f(x) = (ax + b)\, h(x) + s$ dengan :

a. cara bersusun
b. cara Horner

Pembahasan:

a. Cara bersusun

$$\begin{array}{r l}
 & \boxed{x^3 - 2x^2 + 3x + \frac{2}{3}} \\
3x + 1 \,\big) & 3x^4 - 5x^3 + 7x^2 + 5x + 2 \\
 & \underline{3x^4 + x^3} \quad - \\
 & -6x^3 + 7x^2 \\
 & \underline{-6x^3 - 2x^2} \quad - \\
 & 9x^2 + 5x \\
 & \underline{9x^2 + 3x} \quad - \\
 & 2x + 2 \\
 & \underline{2x + \frac{2}{3}} \quad - \\
 & 1\frac{1}{3}
\end{array}$$

Hasil bagi $h(x)$

sisa (s)

Dari hasil pembagian secara bersusun, diperoleh hasil bagi $h(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + \frac{2}{3}$ dan sisa pembagian $s = 1\frac{1}{3}$, sehingga $f(x)$ dapat dituliskan sebagai berikut

$$f(x) = (3x + 1)\left(x^3 - 2x^2 + 3x + \frac{2}{3}\right) + 1\frac{1}{3}$$

b. Cara Horner

$(3x^4 - 5x^3 + 7x^2 + 5x + 2) : (3x + 1) \rightarrow$ pembagi $3x + 1 \rightarrow x = -\frac{1}{3}$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
-\frac{1}{3} & \boxed{3 \quad -5 \quad 7 \quad 5 \quad 2} & & & & \\
 & & -1 & 2 & -3 & -\frac{2}{3} \\
\hline
 & \underbrace{3 \quad -6 \quad 9 \quad 2}_{\text{Koefisien } h(x)} & & & & 1\frac{1}{3}
\end{array} +$$

Koefisien $f(x)$

Sisa $s = f\left(-\frac{1}{3}\right)$

Diperoleh $h(x) = 3x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ dan $s = 1\frac{1}{3}$

Selanjutnya hasil bagi dan sisa pembagian $f(x)$ oleh $(3x + 1)$ adalah :

Hasil bagi

$$\frac{h(x)}{a} = \frac{3x^3 - 6x^2 + 9x + 2}{3}$$
$$= x^3 - 2x^2 + 3x + \frac{2}{3}$$

Sisa pembagian

$$s = f\left(-\frac{1}{3}\right) = 1\frac{1}{3}$$

Sehingga $f(x)$ dapat ditulis :

$$(3x^4 - 5x^3 + 7x^2 + 5x + 2) = (3x + 1)\left(x^3 - 2x^2 + 3x + \frac{2}{3}\right) + 1\frac{1}{3}$$

Dari dua contoh di atas, pembagian suku banyak $f(x)$ oleh bentuk linear $(x - k)$ atau $(ax + b)$, dapat disimpulkan bahwa :

- Derajat hasil bagi $h(x)$ maksimum **satu lebih kecil** dari pada derajat suku banyak $f(x)$.
- Derajat sisa s maksimum **satu lebih kecil** dari pada derajat pembagi.

3. Pembagian Suku Banyak oleh Bentuk Kuadrat $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$ dengan $\boldsymbol{a \neq 0}$

Jika polinomial $f(x)$ dibagi dengan $ax^2 + bx + c$ dengan $a \neq 0$, maka hasil bagi dan sisa pembagian polinomial dapat ditentukan dengan cara pembagian bersusun, skema Horner, dan skema Horner kino.

a. Cara Bersusun

Pembagian suku banyak $f(x)$ oleh bentuk kuadrat $ax^2 + bx + c$ dengan $a \neq 0$ dapat dilakukan dengan cara bersusun seperti halnya pada pembagian suku banyak oleh bentuk linear $(x - k)$ atau $(ax + b)$.

Secara umum, algoritma pembagian suku banyak $f(x)$ oleh bentuk kuadrat $(ax^2 + bx + c)$ dapat dinyatakan dengan persamaan :

$$f(x) = (ax^2 + bx + c)\, h(x) + s(x)$$

Anak-anakku untuk lebih memahami pembagian polinomial oleh bentuk kuadrat $ax^2 + bx + c$ dengan cara bersusun, mari simak beberapa contoh soal berikut.

Contoh Soal 1

Tentukan hasil bagi dan sisa pembagian dari $(x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 4x - 15) : (x^2 - x - 6)$ dengan cara bersusun.

Pembahasan:

$$\boxed{x^2 + 4x + 3} \longleftarrow \text{Hasil bagi } h(x)$$

$$\begin{array}{r|l} x^2 - x - 6 & x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 4x - 15 \\ & \underline{x^4 - x^3 - 6x^2} \quad - \\ & \quad 4x^3 - x^2 - 4x \\ & \quad \underline{4x^3 - 4x^2 - 24x} \quad - \\ & \qquad 3x^2 + 20x - 15 \\ & \qquad \underline{3x^2 - 3x - 18} \quad - \\ & \qquad\quad \boxed{23x + 3} \longleftarrow \text{Sisa } s(x) \end{array}$$

Berdasarkan pembagian bersusun di atas diperoleh hasil bagi $h(x) = x^2 + 4x + 4$ dan sisa pembagian $s(x) = 23x + 3$ sehingga suku banyak $f(x)$ dapat dituliskan sebagai berikut

$$x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 4x - 15 = (x^2 - x - 6)(x^2 + 4x + 3) + (23x + 3)$$

Jadi, hasil bagi $h(x) = x^2 + 4x + 4$ dan sisa pembagian $s(x) = 23x + 3$

Contoh Soal 2

Tentukan hasil bagi dan sisa pembagian dari $(2x^3 - 6x^2 + 5x + 10) : (x^2 - 4)$ dengan cara bersusun.

Pembahasan:

$$\boxed{2x - 6} \longleftarrow \text{Hasil bagi } h(x)$$

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 4 & 2x^3 - 6x^2 + 5x + 10 \\ & \underline{2x^3 - 8x} \quad - \\ & \quad -6x^2 + 13x + 10 \\ & \quad \underline{-6x^2 + 24} \quad - \\ & \qquad \boxed{13x - 14} \longleftarrow \text{Sisa } s(x) \end{array}$$

Bersasarkan pembagian bersusun di atas diperoleh hasil bagi $h(x) = 2x - 6$ dan sisa pembagian $s(x) = 13x - 14$ sehingga $f(x)$ dapat dituliskan sebagai berikut.

$$(2x^3 - 6x^2 + 5x + 10) = (x^2 - 4)(2x - 6) + (13x - 14)$$

Jadi, hasil bagi $h(x) = 2x - 6$ dan sisa pembagian $s(x) = 13x - 14$

Catatan

Jika polinomial yang dibagi berderajat n dan pembaginya berderajat m, maka diperoleh:

- Hasil bagi berderajat $n - m$
- Sisa pembagian berderajat $m - 1$ (derajat dari sisa pembagian kurang satu dari derajat pembagi)

b. Cara Skema Horner

Pembagian polinomial dengan cara skema Horner hanya dapat digunakan untuk pembagi yang dapat difaktorkan. Misalkan polinomial $f(x)$ dibagi oleh bentuk kuadrat $ax^2 + bx + c$ yang dapat difaktorkan. Kita dapat menentukan hasil bagi dan sisa pembagian dengan cara skema Horner, yuk perhatikan langkah-langkahnya

Langkah-langkah pembagian polinomial dengan cara skema Horner

1. Misalkan $ax^2 + bx + c$ dapat difaktorkan dan ditulis sebagai $a(x - k_1)(x - k_2)$, dengan $a \neq 0$
2. Langkah awal, kita bagi $f(x)$ dengan $(x - k_1)$. Pada langkah ini diperoleh
$$f(x) \equiv (x - k_1)h_1(x) + s_1$$
3. Hasil bagi $h_1(x)$ dibagi lagi dengan $(x - k_2)$. Pada langkah ini diperoleh
$$h_1(x) \equiv (x - k_2)h_2(x) + s_2$$
4. Substitusi $h_1(x)$ ke bentuk persamaan $f(x)$, diperoleh:
$$f(x) \equiv (x - k_1)[(x - k_2)h_2(x) + s_2)] + s_1$$
$$f(x) \equiv (x - k_1)(x - k_2)h_2(x) + s_2(x - k_1) + s_1$$
$$\boldsymbol{f(x) \equiv a(x - k_1)(x - k_2)\frac{h_2(x)}{a} + s_2(x - k_1) + s_1}$$

c. Cara Skema Horner - Kino

Skema Horner – kino dicetuskan oleh Sukino, Horner kino merupakan pengembangan dari skema Horner kino. Pada skema Horner terbatas untuk pembagi yang bias difaktorkan sedangkan untuk skema Horner kino dapat diterapkan untuk pembagi apapun.
Anak-anakku untuk lebih memahami pembagian polinomial oleh bentuk kuadrat $ax^2 + bx + c$ dengan cara skema Horner atau skema Horner kino, yuk kita perhatikan beberapa contoh soal berikut.

Contoh Soal

Tentukan hasil bagi dan sisa pembagian dari polinomial $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 1$ oleh $x^2 - x - 2$ dengan cara:

a. Skema Horner
b. Skema Horner-Kino

Pembahasan:

Nyatakan polinomial $f(x)$ ke dalam pangkat turun sebagai berikut
$$f(x) = x^4 + 0x^3 - 3x^2 + 2x - 1$$

a. Skema Horner

Pembagi $x^2 - x - 2$ dapat difakrokan menjadi $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$ hal ini berarti $k_1 = 2$ dan $k_2 = -1$

	1	**0**	**-3**	**2**	**-1**	
2		2	4	2	8	+
	1	2	1	4	7	
-1		-1	-1	0	+	
	1	1	0	4		

Sisa pertama s_1

Sisa kedua s_2

Koefisien hasil bagi kedua $h_2(x)$

Berdasarkan pembagian menggunakan skema Horner diperoleh:
Hail bagi : $h(x) = x^2 + x + 0$
Sisa pertama : $s_1 = 7$
Sisa kedua : $s_2 = 4$
Sisa pembagian :

$$\begin{aligned} s(x) &= s_2(x - k_1) + s_1 \\ &= 4(x-2) + 7 \\ &= 4x - 8 + 7 \\ &= 4x - 1 \end{aligned}$$

Jadi, hasil bagi $h(x) = x^2 + x$ dan sisa pembagian $s(x) = 4x - 1$

b. Skema Horner-Kino

	1	**0**	$\mathbf{-3}$	**2**	$\mathbf{-1}$	Koefisien $f(x)$
2	*	*	2	2	0	
						+
1	*	1	1	0	*	
	1	1	0	4	-1	Sisa $s(x)$

Koefisien hasil bagi $h(x)$

Keterangan:
- Perhatikan pembagi $x^2 - x - 2$
- Baris 2 kolom paling kiri: $-\left(\frac{-2}{1}\right) = 2$, kolom 1 dan kolom 2 tidak diproses dan diberi tanda *
- Baris 3 kolom paling kiri: $-\left(\frac{-1}{1}\right) = 1$, kolom 1 dan kolom 5 tidak diproses dan diberi tanda *

Jadi, hasil bagi $h(x) = x^2 + x$ dan sisa pembagian $s(x) = 4x - 1$

Teorema Sisa

1. Teorema Sisa untuk Pembagi Bentuk Linier $(x - k)$

Jika suatu polinomial $f(x)$ dibagi oleh $(x - k)$, maka akan diperoleh hasil bagi $h(x)$ dan sisi pembagian s, yang memenuhi hubungan

$$f(x) = (x - k) \cdot h(x) + s$$

Karena pembagi berderajat 1 yaitu $(x - k)$, maka sisa pembagi s maksimum berderajat nol, yaitu sebuah konstanta. Sisa pembagian s dapat ditentukan dengan menggunakan teorema berikut.

> Jika polinomial $f(x)$ berderajat n dibagi dengan $(x - k)$, maka sisa pembagian s ditentukan oleh $s = f(k)$

Bukti :
Anak-anakku untuk membuktikan teorema di atas, kita perhatikan derajat pembagi $(x - k)$ adalah 1, karena derajat pembagi 1 maka sisa pembagiannya berderajat 0 yang merupakan suatu konstanta s sehingga diperoleh:
$f(x) = (x - k)h(x) + s$
Untuk $x = k$ maka

$$\begin{aligned} f(k) &= (k - k)h(k) + s \\ &= 0 \cdot h(k) + s \end{aligned}$$

$= 0 + s$
$= s$

Terbukti sisa $= s = f(k)$

Berikut merupakan contoh soal penggunaan teorema sisa untuk pembagi bentuk linear $(x - k)$, yuk kita simak

Contoh Soal 1

Sisa pembagian jika suku banyak $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + x + 8$ dibagi oleh $(x + 2)$ adalah …

Pembahasan:

Suku banyak $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + x + 8$ dibagi oleh $(x + 2) \to x + 2 = 0 \to x = -2$, karena pembagi berbentuk linear maka menurut teorema sisa diperoleh sisa $s = f(-2)$

Substitusi $x = -2$ ke suku banyak $f(x)$

$s = f(-2)$
$= 2(-2)^3 - 4(-2)^2 + (-2) + 8$
$= 2(-8) - 4(4) - 2 + 8$
$= -16 - 16 - 2 + 8$
$= -26$

Jadi, sisa pembagian $f(x)$ oleh $(x + 2)$ adalah -26

Contoh Soal 2

Diketahui $f(x) = 3x^3 + (4 + m)x^2 + mx + 6$. Tentukan nilai m agar $f(x)$ dibagi oleh $(x + 2)$ memberikan sisa -10

Pembahasan:

$f(x) = 3x^3 + (4 + m)x^2 + mx + 6$

Jika $f(x)$ dibagi oleh $(x + 2)$, maka menurut teorema sisa berlaku

$s = f(-2)$
$= 3(-2)^3 + (4 + m)(-2)^2 + m(-2) + 6$
$= 3(-8) + (4 + m)(4) - 2m + 6$
$= -24 + 16 + 4m - 2m + 6$
$= -2 + 2m$

Diketahui sisa $s = -10$ maka

$-2 + 2m = -10$
$2m = -10 + 2$
$2m = -8$
$m = -\frac{8}{2}$
$m = -4$

Jadi, nilai m adalah -4

2. Teorema Sisa untuk Pembagi Bentuk Linier $(ax + b)$

Jika suatu polinomial $f(x)$ dibagi oleh $(ax + b)$, maka akan diperoleh hasil bagi $\frac{h(x)}{a}$ dan sisi pembagian s, yang memenuhi hubungan

$$f(x) = (ax + b) \cdot \frac{h(x)}{a} + s$$

Sisa pembagian s ditentukan menggunakan teorema berikut ini.

Jika polinomial $f(x)$ berderajat n dibagi dengan $(ax+b)$, maka sisa pembagian s ditentukan oleh $s = f(-\frac{b}{a})$

Bukti:
Anak-anakku untuk membuktikan teorema di atas, perhatikan derajat pembagi $(ax+b)$ adalah 1. Karena derajat pembagi 1, maka sisa pembagiannya berderajat 0 dan berupa konstanta s sehingga diperoleh:

$$f(x) = (ax+b)h(x) + s$$

Untuk $x = -\frac{b}{a}$, maka berlaku

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{b}{a}\right) &= \left(a \cdot \left(-\frac{b}{a}\right) + b\right) \cdot h\left(-\frac{b}{a}\right) + s \\ &= (-b+b) \cdot h\left(-\frac{b}{a}\right) + s \\ &= 0 \cdot h\left(-\frac{b}{a}\right) + s \\ &= 0 + s \\ &= s \end{aligned}$$

Terbukti, sisa $= s = f\left(-\frac{b}{a}\right)$

Berikut merupakan contoh soal penggunaan teorema sisa untuk pembagi bentuk linear $(ax+b)$, yuk kita simak

Contoh Soal

Sisa pembagian jika suku banyak $f(x) = 2x^3 - x^2 + x - 2$ dibagi oleh $(2x-1)$ adalah …

Pembahasan:
Suku banyak $f(x) = 2x^3 - x^2 + x - 2$ dibagi oleh $(2x-1) \to 2x - 1 = 0 \to x = \frac{1}{2}$, karena pembagi berbentuk linear maka menurut teorema sisa diperoleh sisa $s = f\left(\frac{1}{2}\right)$

Substitusi $x = \frac{1}{2}$ ke suku banyak $f(x)$

$$\begin{aligned} s &= f\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - 2 \\ &= 2\left(\frac{1}{8}\right) - \left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} - 2 \\ &= \frac{2}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 2 \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 2 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{4}{2} \\ &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Jadi, sisa pembagian $f(x)$ oleh $(2x-1)$ adalah $-\frac{3}{2}$

3. Teorema Sisa untuk Pembagi Bentuk $(\boldsymbol{x-a})(\boldsymbol{x-b})$

Jika pembagi bentuk kuadrat tidak dapat difaktorkan, maka sisa pembagian tidak dapat diperoleh dengan teorema sisa, tetapi harus menggunakan cara pembagian bersusun.
Pembagian polinomial $f(x)$ oleh $(x-a)(x-b)$ memberikan hasil bagi $h(x)$ dan sisa pembagian $s(x)$, yang memenuhi hubungan:

$$f(x)=(x-a)(x-b)h(x)+s(x)$$

Karena $(x-a)(x-b)$ berderajat 2, maka sisa pembagiannya maksimal berderajat 1, misalkan $s(x)=px+q$, maka hubungan di atas menjadi

$$f(x)=(x-a)(x-b)h(x)+(px+q)$$

Berdasarkan uraian di atas diperoleh:

> Sisa pembagian polinomial $f(x)$ oleh $(x-a)(x-b)$ adalah $s(x)=px+q$ dengan $f(a)=pa+q$ dan $f(b)=pb+q$

Bukti:
Derajat pembagi polinomial $(x-a)(x-b)$ adalah 2, maka sisa pembagiannya berderajat 1 yaitu $s(x)=px+q$ sehingga diperoleh:

$f(x)=(x-a)(x-b)\,h(x)+s(x)$
$f(x)=(x-a)(x-b)\,h(x)+(px+q)$

Untuk $x=a$ diperoleh

$$\begin{aligned}f(a)&=(a-a)(x-b)h(a)+(pa+q)\\&=0(x-b)\,h(a)+(ap+q)\\&=0+(ap+q)\\&=ap+q\end{aligned}$$

$\therefore\ \boldsymbol{f(a)=ap+q}$

Untuk $x=b$ diperoleh

$$\begin{aligned}f(b)&=(b-a)(b-b)h(b)+(pb+q)\\&=(b-a)\cdot 0\cdot h(b)+(bp+q)\\&=0+(bp+q)\\&=bp+q\end{aligned}$$

$\therefore\ \boldsymbol{f(b)=bp+q}$

Terbukti: sisa $s(x)=px+q$ dengan $f(a)=pa+q$ dan $f(b)=pb+q$
Anak-anakku agar kita lebih memahami penggunaan teorema sisa untuk pembagi $(x-a)(x-b)$ mari kita pahami contoh soal berikut.

Contoh Soal

Suku banyak $f(x)$ jika dibagi $(x+2)$ sisanya 12 dan jika dibagi $(x-3)$ sisanya -3. Tentukan sisanya jika $f(x)$ dibagi oleh $(x+2)(x-3)$!

Pembahasan:
Pembagi $(x+2)(x-3)$ berderajat 2, maka sisanya $s(x)$ berderajat 1.
Misal $s(x)=px+q$
$f(x)$ dibagi $(x+2)(x-3)$, maka dapat ditulis :

$$\begin{aligned}f(x)&=(x+2)(x-3)\cdot h(x)+s(x)\\&=(x+2)(x-3)\cdot h(x)+(px+q)\end{aligned}$$

$f(x)$ dibagi $(x+2)$ bersisa 12, maka $f(-2)=12$, sehingga :

$$\begin{aligned}f(-2)&=12\\(-2+2)(-2-3)\cdot h(-2)+(p(-2)+q)&=12\\0\cdot(-5)\cdot h(-2)+(-2p+q)&=12\\0+(-2p+q)&=12\\-2p+q&=12\end{aligned}$$

Diperoleh persamaan $-2p+q=12$ merupakan persamaan (i)

$f(x)$ dibagi $(x-3)$ bersisa -3, maka $f(3)=-3$, sehingga:

$$\begin{aligned} f(3) &= -3 \\ (3+2)(3-3)h(3)+(p(3)+q) &= -3 \\ 5\cdot 0\cdot h(3)+(3p+q) &= -3 \\ 0+3p+q &= -3 \\ 3p+q &= -3 \end{aligned}$$

Diperroleh persamaan $3p+q=-3$ merupakan persamaan (ii)

Eliminasi q pada persamaan (i) dan (ii) untuk mencari nilai p

$$\begin{aligned} -2p+q &= 12 \\ \underline{3p+q} &\underline{= -3 \quad -} \\ -5p &= 15 \\ -p &= \frac{15}{5} \\ -p &= 3 \\ \boldsymbol{p} &\boldsymbol{= -3} \end{aligned}$$

Substitusi nilai $p=-3$ ke persamaan (i)

$$\begin{aligned} -2p+q &= 12 \\ -2(-3)+q &= 12 \\ 6+q &= 12 \\ q &= 12-6 \\ \boldsymbol{q} &\boldsymbol{= 6} \end{aligned}$$

Diperoleh sisa pembagian

$$\begin{aligned} s(x) &= px+q \\ &= -3x+6 \end{aligned}$$

Jadi, sisa pembagiannya adalah $s(x)=-3x+6$

Teorema Faktor

Anda telah mengetahui bahwa faktor-faktor dari 6 adalah 1, 2, 3, dan 6. Bilangan 2 termasuk faktor dari 6 karena **6 dapat dibagi habis oleh 2** atau **pembagian 6 oleh 2 tidak memberikan sisa** (sisanya = 0). Hal ini dapat ditulis :

$$\frac{6}{2}=3+0$$

atau $6=2\times 3+0$ dimana 0 adalah sisa pembagian.

Hal tersebut juga berlaku pada suku banyak. Sebagai contoh, $(x+1)$ adalah faktor dari $f(x)=x^2-5x-6$, karena pembagian $f(x)=x^2-5x-6$ oleh $(x+1)$ memberikan sisa 0. Hal ini dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{x^2-5x-6}{(x+1)}=(x-6)+0$$

atau

$x^2-6x-6=(x+1)(x-6)+0$, dimana 0 adalah sisa

Misalkan suku banyak $f(x)$ dibagi oleh $(x-k)$ memberikan hasil bagi $h(x)$ dan sisa $s(x)$. Jika $(x-k)$ merupakan faktor dari suku banyak $f(x)$, maka pembagian $f(x)$ oleh $(x-k)$ tidak memberikan sisa atau $s(x)=0$. Secara umum disimpulkan bahwa jika $(x-k)$ merupakan faktor dari suku banyak $f(x)$, maka dapat dinyatakan dalam persamaan :

$$f(x) = (x-k)\,.\,h(x)$$

Teorema Faktor

1. Suatu fungsi suku banyak $f(x)$ memiliki faktor $(x-k)$ jika dan hanya jika $f(k)=0$
2. Suatu fungsi suku banyak $f(x)$ memiliki faktor $(ax+b)$ jika dan hanya jika $f\left(-\frac{b}{a}\right)=0$

Bukti 1 :
Pertama :
Membuktikan bahwa " jika $(x - k)$ merupakan faktor dari $f(x)$, maka $f(k) = 0$ "
$(x - k)$ merupakan faktor dari $f(x)$, maka dari pengertian faktor dapat ditulis :

$$f(x) = (x - k) . h(x)$$

dimana $h(x)$ adalah hasil bagi.
Untuk $x = k$, maka :

$$\begin{aligned} f(k) &= (k - k) \cdot h(k) \\ &= 0 \cdot h(k) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Jadi, terbukti $f(k) = 0$

Kedua :
Membuktikan bahwa " jika $f(k) = 0$, maka $(x - k)$ merupakan faktor dari $f(x)$"
Menurut teorema sisa, pembagian $f(x)$ oleh $(x - k)$ memberikan sisa $s = f(k)$, sehingga dapat dituliskan :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - k) . h(x) + s \\ f(x) &= (x - k) . h(x) + f(k) \end{aligned}$$

Jika $f(k) = 0$, maka :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - k) . h(x) + 0 \\ f(x) &= (x - k) . h(x) \end{aligned}$$

artinya $(x - k)$ adalah faktor dari $f(x) \rightarrow$ berdasarkan definisi faktor. (terbukti).

Dari tahap pertama dan kedua, terbukti bahwa "suatu fungsi suku banyak $f(x)$ memiliki faktor $(x - k)$ jika dan hanya jika $f(k) = 0$"

Dengan cara yang sama, kalian dapat membuktikan teorema faktor yang kedua.

Anak-anakku untuk lebih memahami penggunaan teorema faktor, mari kita pahami beberapa contoh soal berikut.

Contoh Soal

Tunjukkan bahwa $(x - 1)$ dan $(x + 1)$ merupakan faktor dari $x^3 - 5x^2 - x + 5$!

Pembahasan:
Misalkan $f(x) = x^3 - 5x^2 - x + 5$. Untuk menunjukkan bahwa $(x - 1)$ adalah faktor dari $f(x)$, cukup ditunjukkan $f(1) = 0$ berdasarkan teorema faktor

$$\begin{aligned} f(1) &= (1)^3 - 5 \cdot (1)^2 - (1) + 5 \\ &= 1 - 5 \cdot 1 - 1 + 5 \\ &= 1 - 5 - 1 + 5 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Jadi, $(x - 1)$ adalah faktor dari $f(x)$.
Demikian juga untuk $(x + 1)$, cukup ditunjukkan bahwa $f(-1) = 0$ berdasarkan teorema faktor

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^3 - 5(-1)^2 - (-1) + 5 \\ &= -1 - 5(1) + 1 + 5 \\ &= -1 - 5 + 1 + 5 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Jadi, $(x + 1)$ adalah faktor dari $f(x)$.

Contoh Soal

Tentukan nilai p sehingga $x^3 - x^2 + px - 15$ mempunyai faktor $(x - 3)$.

Pembahasan:
Misalkan $f(x) = x^3 - x^2 + px - 15$
$(x-3)$ merupakan faktor dari $f(x)$, berdasarkan teorema faktor $f(3) = 0$ sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} f(3) &= 0 \\ (3)^3 - (3)^2 + p(3) - 15 &= 0 \\ 27 - 9 + 3p - 15 &= 0 \\ 3p + 3 &= 0 \\ 3p &= -3 \\ p &= -\frac{3}{3} \\ p &= -1 \end{aligned}$$

Jadi, nilai p adalah -1.

C. Rangkuman

Berdasarkan uraian materi pada kegiatan pembelajaran 2, dapat disimpulkan:

1. Misalkan suku banyak $f(x)$ dibagi oleh $p(x)$ menghasilkan $h(x)$ dan sisanya $s(x)$, maka dapat ditulis $\boldsymbol{f(x) = p(x) \cdot h(x) + s(x)}$
2. Proses pembagian suku banyak dapat dilakukan dengan 2 cara, yaitu cara bersusun dan cara sintetik (cara Horner)
3. Pembagian polinomial $f(x)$ dengan pembagi $(x-k)$ menghasilkan hasil bagi $h(x)$ dan sisa $s(x)$ berderajat nol atau $s(x)$ = konstanta, dituliskan sebagai berikut.
   $$f(x) = (x-k) \cdot h(x) + s(x)$$
4. Jika polinomial $f(x)$ dibagi $(ax+b)$ memberikan hasil bagi $h(x)$ dan sisa s, maka diperoleh hubungan:
   $$f(x) = (ax+b)\frac{h(x)}{a} + s$$
   Hasil bagi $f(x)$ oleh $(ax+b)$ adalah $\frac{h(x)}{a}$
   Sisa pembagian s adalah $f\left(-\frac{b}{a}\right)$
5. Menentukan derajat hasil bagi dan sisa pada pembagian polinomial $f(x)$ dengan pembagi bentuk linear $(x - k)$ atau $(ax + b)$ berlaku:
   - Derajat hasil bagi $h(x)$ maksimum **satu lebih kecil** dari pada derajat suku banyak $f(x)$.
   - Derajat sisa s maksimum **satu lebih kecil** dari pada derajat pembagi.
6. **Pembagian Suku Banyak oleh Bentuk Kuadrat $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$ dengan $\boldsymbol{a \neq 0}$**
   Jika polinomial $f(x)$ dibagi dengan $ax^2 + bx + c$ dengan $a \neq 0$, maka hasil bagi dan sisa pembagian polinomial dapat ditentukan dengan cara pembagian bersusun, skema Horner, dan skema Horner kino.
   a. Cara Bersusun
   Secara umum, algoritma pembagian suku banyak $f(x)$ oleh bentuk kuadrat $(ax^2 + bx + c)$ dapat dinyatakan dengan persamaan :
   $$f(x) = (ax^2 + bx + c)\,h(x) + s(x)$$

b. Cara Skema Horner

Pembagian polinomial dengan cara skema Horner hanya dapat digunakan untuk pembagi yang dapat difaktorkan. Misalkan polinomial $f(x)$ dibagi oleh bentuk kuadrat $ax^2 + bx + c$ yang dapat difaktorkan. Kita dapat menentukan hasil bagi dan sisa pembagian dengan cara skema Horner, yuk perhatikan langkah-langkahnya
Langkah-langkah pembagian polinomial dengan cara skema Horner

1. Misalkan $ax^2 + bx + c$ dapat difaktorkan dan ditulis sebagai $a(x - k_1)(x - k_2)$, dengan $a \neq 0$
2. Langkah awal, kita bagi $f(x)$ dengan $(x - k_1)$. Pada langkah ini diperoleh
$$f(x) \equiv (x - k_1)h_1(x) + s_1$$
3. Hasil bagi $h_1(x)$ dibagi lagi dengan $(x - k_2)$. Pada langkah ini diperoleh
$$h_1(x) \equiv (x - k_2)h_2(x) + s_2$$
4. Substitusi $h_1(x)$ ke bentuk persamaan $f(x)$, diperoleh:
$$f(\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{k_1})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{k_2})\frac{\boldsymbol{h_2}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{s_2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{k_1}) + \boldsymbol{s_1}$$

c. Cara Skema Horner - Kino

Skema Horner – kino dicetuskan oleh Sukino, Horner kino merupakan pengembangan dari skema Horner kino. Pada skema Horner terbatas untuk pembagi yang bias difaktorkan sedangkan untuk skema Horner kino dapat diterapkan untuk pembagi apapun.

7. Jika polinomial yang dibagi berderajat n dan pembaginya berderajat m, maka diperoleh:
   - Hasil bagi berderajat $n - m$
   - Sisa pembagian berderajat $m - 1$ (derajat dari sisa pembagian kurang satu dari derajat pembagi)
8. **Teorema Sisa untuk Pembagi Bentuk Linier $(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{k})$**

Jika polinomial $f(x)$ berderajat n dibagi dengan $(x - k)$, maka sisa pembagian s ditentukan oleh $s = f(k)$

9. **Teorema Sisa untuk Pembagi Bentuk Linier $(\boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b})$**

Jika polinomial $f(x)$ berderajat n dibagi dengan $(ax + b)$, maka sisa pembagian s ditentukan oleh $s = f(-\frac{b}{a})$

10. **Teorema Sisa untuk Pembagi Bentuk $(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b})$**

Sisa pembagian polinomial $f(x)$ oleh $(x - a)(x - b)$ adalah $s(x) = px + q$ dengan $f(a) = pa + q$ dan $f(b) = pb + q$

11. Teorema Faktor

1. Suatu fungsi suku banyak $f(x)$ memiliki faktor $(x - k)$ jika dan hanya jika $f(k) = 0$
2. Suatu fungsi suku banyak $f(x)$ memiliki faktor $(ax + b)$ jika dan hanya jika $f\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$

KEGIATAN PEMBELAJARAN 3
PERSAMAAN POLINOMIAL

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 3 ini diharapkan siswa dapat:
1. Memahami persamaan polinomial
2. Menentukan akar-akar persamaan polinomial
3. Menentukan jumlah akar-akar polinomial
4. Menentukan hasil kali akar-akar polinomial

B. Uraian Materi

Persamaan Polinomial

Persamaan polinomial merupakan kalimat terbuka yang nilai kebenarannya tergantung pada nilai variabel yang diberikan. Secara umum, persamaan polinomial dalam variabel x dapat dituliskan sebagai berikut.

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

Dengan $a_n \neq 0$ dan n bilangan asli
Penyelesaian polinomial merupakan nilai variabel yang membuat persamaan polinomial bernilai benar. Untuk lebih memahami penyelesaian polinomial mari kita simak contoh berikut

Contoh

Persamaan polinomial $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$
Untuk $x = 1$

$$\begin{aligned}(1)^3 - 4(1)^2 + 1 + 6 &= 0\\ 1 - 4\cdot(1) + 1 + 6 &= 0\\ 1 - 4 + 1 + 6 &= 0\\ 4 &= 0 \text{ (salah)}\end{aligned}$$

Diperoleh $x = 1$ bukan merupakan penyelesaian persamaan polinomial
Untuk $x = 2$

$$\begin{aligned}(2)^3 - 4(2)^2 + 2 + 6 &= 0\\ 8 - 4\cdot4 + 2 + 6 &= 0\\ 8 - 16 + 2 + 6 &= 0\\ 0 &= 0 \text{ (benar)}\end{aligned}$$

Diperoleh $x = 2$ merupakan penyelesaian persamaan polinomial

Menentukan Akar-akar Persamaan Rasional

Menentukan akar-akar persamaan rasional dapat diartikan menentukan nilai variabel yang membuat persamaan polinomial bernilai benar. Menentukan akar-akar polinomial berderajat dua dapat dilakukan dengan pemfaktoran, melengkapi kuadrat sempurna, dan rumus abc. Sedangkan untuk menentukan akar-akar polinomial berderajat lebih dari dua, dapat digunakan pengertian dan langkah-lamgkah berikut.

1. Pengertian akar-akar Rasional

- Jika $\frac{b}{c}$ sebuah bilangan rasional pecahan dalam suku terendah, maka $\frac{b}{c}$ merupakan akar persamaan suku banyak:
  $$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0, a_n \neq 0$$

dengan koefisien-koefisien bilangan bulat, dimana b adalah faktor bulat dari a_0 dan c adalah faktor bulat dari a_n

> Jika $\frac{b}{c}$ adalah akar rasional dari $6x^3 + 5x^2 - 3x - 2 = 0$, nilai b dibatasi sampai faktor dari 2, yaitu $\pm 1, \pm 2$, sedangkan nilai c dibatasi sampai faktor dari 6, yaitu: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.
>
> Jadi, akar rasional yang mungkin hanya: $\pm 1, \pm 2, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{6}$ dan $\pm\frac{2}{3}$.

- Jika persamaan $f(x) = 0$ mempunyai koefisien-koefisien bulat dengan koefisien pangkat tertinggi adalah satu dan laiinya dalam bentuk p seperti berikut.
  $$x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \cdots + p_{n-1}x + p_n = 0$$

Maka setiap akar rasional dari $f(x) = 0$ adalah sebagai bilangan bulat dan sebuah faktor dari p_n.

> Jadi, akar-akar rasional (jika ada) dari persamaan $x^3 + 2x^2 - 11x - 12 = 0$ terbatas sampai faktor-faktor bulat dari 12, yaitu $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6$, dan ± 12

2. Menentukan akar-akar rasional persamaan suku banyak $f(x) = 0$

Langkah-langkah menentukan akar-akar rasional persamaan polinomial $f(x) = 0$ adalah sebagai berikut:

Langkah 1

- Selidiki apakah jumlah koefisien-koefisien $f(x) = 0$?
  - Jika ya, maka $x = 1$ merupakan akar dari $f(x) = 0$
  - Jika tidak, lakukan langkah 2

Langkah 2

- Periksa apakah jumlah koefisien-koefisien variabel berpangkat genap sama dengan jumlah koefisien-koefisien berpangkat ganjil?
  - jika ya, maka $x = -1$ merupakan akar dari $f(x) = 0$
  - Jika tidak, lakukan langkah 3

Langkah 3

- Tentukan faktor-faktor dari nilai mutlak a_0 ($a_0 \neq 0$, lakukan dengan cara coba-coba

Anak-anakku, untuk lebih memahami cara menentukan akar-akar rasional dari persamaan polinomial $f(x) = 0$, mari kita simak contoh soal berikut.

Contoh Soal

Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan polinomial

$$x^4 - 15x^2 - 10x + 24 = 0$$

Pembahasan:

Misalkan $f(x) = x^4 + 0x^3 - 15x^2 - 10x + 24$

Untuk menentukan himpunan penyelesaian dari polinomial $f(x)$ ikuti langkah-langkah berikut

- Langkah 1

  Jumlahkan koefisen-koefisien $f(x)$, yaitu:

  Koefisien x^4 : 1

  Koefisien x^3 : 0

  Koefisien x^2 : -15

  Koefisien x : -10

  Koefisien x^0 atau konstanta : 24

  Jumlah koefisien-koefisien $f(x) = 1 + 0 + (-15) + (-10) + 24 = 0$

  Karena jumlah koefisien-koefisien $f(x) = 0$ maka $x = 1$ merupakan akar dari persamaan polinomial $f(x) = 0$

  Untuk mencari akar yang lain, kita bias gunakan skema horner berikut.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & -15 & -10 & 24 & \\ 1 & * & 1 & 1 & -14 & -24 & + \\ \hline & \underbrace{1 \quad\; 1 \quad\; -14 \quad\; -24}_{\text{Koefisien hasil bagi } h(x)} & & & & \boxed{0} & \end{array}$$

  Dari pembagian dengan skema horner diperoleh hasil bagi $h(x) = x^3 + x^2 - 14x - 24$

- Lakukan langkah 1 lagi pada hasil bagi $h(x) = x^3 + x^2 - 14x - 24$

  Koefisien-koefisien dari $h(x)$ yaitu:

  Koefisien x^3 : 1

  Koefisien x^2 : 1

  Koefisien x : -14

  Koefisien x^0 atau konstanta : -24

  Jumlahkan koefisien-koefisien pada $h(x)$

  $= 1 + 1 - 14 - 24$

  $= -36$

  Karena jumlah koefisien $h(x) = -36 \neq 0$ maka lakukan langkah 2

- Langkah 2 untuk menentukan faktor dari $h(x)$

  Jumlahkan koefisen berpangkat ganjil dan koefisen berpangkat genap

Koefisien pangkat ganjil yaitu :
Koefisien x^3 : 1
Koefisien x : -14
Jumlah koefisien pangkat ganjil $= 1 + (-14) = -13$
Koefisien pangkat genap yaitu:
Koefisien x^2 : 1
Koefisien x^0 atau konstanta : -24
Jumlah koefisien pangkat genap $= 1 + (-24) = -23$
Karena jumlah koefisien pangkat ganjil $(-13) \neq$ jumlah koefisien pangkat genap (-23) maka lanjutkan ke langkah 3

- Langkah 3
  Perhatikan nilai mutlak konstanta yaitu $a_0 = |a_0| = |24|$
  Faktor dari 24 adalah $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12$, dan $\pm$ 24
  Karena $x = \pm 1$ bukan merupakan akar dari $h(x)$, maka nilai $x = \pm 1$ tidak perlu dicoba lagi dengan skema horner

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 1 & -14 & -24 & \\
-2 & & & & & \\
 & * & -2 & 2 & 24 & + \\
\hline
 & \underbrace{1 \quad -1 \quad -12}_{\text{Koefisien hasil bagi } h(x)} & & & \boxed{0} \leftarrow \text{Sisa } (s) &
\end{array}
$$

$\therefore x = -2$ merupakan akar dari $h(x) = 0$ dengan hasil bagi $= x^2 - x - 12$
Untuk mencari akar yang lain, kita dapat memfaktorkan hasil bagi $x^2 - x - 12$ sebagai berikut

$$x^2 - x - 12 = 0$$
$$(x - 4)(x + 3) = 0$$
$$x = 4 \text{ atau } x = -3$$

Akar-akar persamaan $x^4 - 15x^2 - 10x + 24 = 0$ adalah $-3, -2, 1,$ dan 4
Jadi, HP dari persamaan suku banyak itu adalah $\{-3, -2, 1, 4\}$

Jumlah dan Hasil Kali Akar-akar Persamaan Polinomial

Jumlah dan hasil kali akar-akar suatu polinomial dapat ditentukan tanpa harus mencari akar-akarnya terlebih dahulu. Jumlah dan hasil kali akar-akar polinomial dijelaskan dalam teorema berikut.
Misalkan x_1, x_2, dan x_3 adalah akar – akar persamaan suku banyak berderajat tiga

$$f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0 \ldots (1)$$

Maka persamaan tersebut dapat ditulis dalam bentuk :

$$A(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$$
$$A[\,x_2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2\,](\,x - x_3\,) = 0$$
$$A[\,x_3 - x_2\,x_3 - (x_1 + x_2)x_2 + x_3\,(x_1 + x_2)x + x_1x_2x - x_1x_2x_3\,] = 0$$
$$A[\,x_3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2\,x_3\,] = 0$$
$$Ax^3 - A(x_1 + x_2 + x_3)x^2 + A(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - Ax_1x_2\,x_3 = 0 \quad \ldots (2)$$

Ruas kiri persamaan (1) dan (2) disamakan, sehingga diperoleh persamaan :

- $Ax^3 \ = \ Ax^3$
- $-A(x_1 + x_2 + x_3)x^2 = Bx^2$
  $-A(x_1 + x_2 + x_3) = B$
  $$\boldsymbol{x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{B}{A}}$$
- $A(x_1x_2 + \ x_1x_3 \ + \ x_2x_3)x = Cx$
  $A(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = C$
  $$\boldsymbol{x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{C}{A}}$$
- $-Ax_1x_2x_3 = D$
  $$\boldsymbol{x_1x_2\, x_3} = -\frac{D}{A}$$

Dengan cara yang sama, kita dapat menemukan rumus jumlah dan hasil kali akar– akar persamaan suku banyak yang berderajat empat atau lebih menggunakan teorema vieta berikut.

Teorema Vieta

Jika $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ adalah akar-akar persamaan polinomial
$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$
maka berlaku:

- $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + x_n = \frac{a_{n-1}}{a_n}$
- $x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_2x_3 + x_2x_4 + \cdots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$
  $\cdots$ dan seterusnya
- $x_1x_2x_3 \dots x_{n-1}x_n = (-1)^n \times \frac{a_0}{a_n}$

Anak-anakku, untuk lebih memahami jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan polinomial, mari kita simak contoh soal berikut.

Contoh Soal

Akar-akar persamaan suku banyak $5x^3 - 10x^2 + 2x + 3 = 0$ adalah $x_1, x_2,$ dan x_3. Tentukan nilai dari :

a. $x_1 \ + \ x_2 \ + \ x_3$
b. $x_1x_2 \ + \ x_1x_3 \ + \ x_2x_3$
c. $x_1x_2\, x_3$

Pembahasan:
$5x^3 - 10x^2 + 2x + 3 = 0$
Dari persamaan polinomial tersebut diperoleh:
$A = 5, B = -10, C = 2,$ dan $D = 3$
a. $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{B}{A} = -\frac{(-10)}{5} = 2$

b. $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{C}{A} = \frac{2}{5}$

c. $x_1x_2\,x_3 = -\frac{D}{A} = -\frac{3}{5}$

Contoh Soal

Akar – akar persamaan suku banyak $x^3 - 4x^2 + x + m = 0$ adalah x_1, x_2, dan x_3. Jika $x_1 = 2$, tentukan nilai dari :

a. $x_1 + x_2 + x_3$

b. $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$

c. $x_1x_2\,x_3$

Pembahasan:

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + m = 0$$

dari nilai $x_1 = 2$ dapat diperoleh nilai m dengan cara mensubstitusi $x = 2$ ke $f(x)$

$$\begin{aligned} f(2) &= 0 \\ (2)^3 - 4(2)^2 + 2 + m &= 0 \\ 8 - 4(4) + 2 + m &= 0 \\ 8 - 16 + 2 + m &= 0 \\ m - 6 &= 0 \\ m &= 6 \end{aligned}$$

Karena $m = 6$ maka $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ diperoleh:

$A = 1, B = -4, C = 1,$ dan $D = 6$

a. $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{B}{A} = -\frac{(-4)}{1} = 4$

b. $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{C}{A} = \frac{1}{1} = 1$

c. $x_1x_2x_3 = -\frac{D}{A} = -\frac{6}{1} = -6$

C. Rangkuman

Berdasarkan uraian materi pada kegiatan pembelajaran 3, dapat disimpulkan:

1. Persamaan polinomial merupakan kalimat terbuka yang nilai kebenarannya tergantung pada nilai variebel yang diberikan. Secara umum, persamaan polinomial dalam variabel x dapat dituliskan sebagai berikut.

   $$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

   dengan $a_n \neq 0$ dan n bilangan asli

2. Menentukan akar-akar rasional persamaan suku banyak $f(x) = 0$

   Langkah-langkah menentukan akar-akar rasional persamaan polinomial $f(x) = 0$ adalah sebagai berikut:

   Langkah 1 : Selidiki apakah jumlah koefisien-koefisien $f(x) = 0$?
   - Jika ya, maka $x = 1$ merupakan akar dari $f(x) = 0$
   - Jika tidak, lakukan langkah 2

   Langkah 2 : Periksa apakah jumlah koefisien-koefisien variabel berpangkat genap sama dengan jumlah koefisien-koefisien berpangkat ganjil?
   - jika ya, maka $x = -1$ merupakan akar dari $f(x) = 0$
   - Jika tidak, lakukan langkah 3

   Langkah 3 : Tentukan faktor-faktor dari nilai mutlak a_0 ($a_0 \neq 0$, lakukan dengan cara coba-coba