KEGIATAN PEMBELAJARAN 1

Rumus Dasar Turunan Fungsi Trigonometri dan Sifat-sifatnya

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini, diharapkan Anda dapat membuktikan rumus-rumus dasar turunan fungsi trigonometri dan menggunakan prinsip atau aturan-aturan turunan ke fungsi trigonometri sederhana.

B. Uraian Materi

Masih ingatkah Anda dengan definisi turunan yang sudah dipelajari saat Anda di kelas XI? Atau pelajaran trigonometri yang sudah Anda pelajari di kelas X dan XI? Mudah-mudahan masih ingat, termasuk materi limit fungsi trigonometri yang sudah dipelajari pada modul sebelumnya, karena materi-materi tersebut merupakan materi prasyarat untuk memahami konsep turunan fungsi trigonometri.

Rumus Dasar Turunan Fungsi Trigonometri

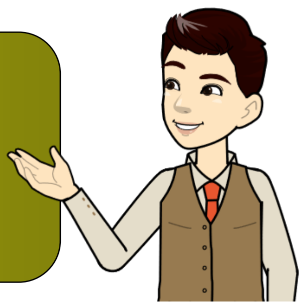
Anda telah melihat pada modul sebelumnya bahwa gradien garis singgung dan kecepatan sesaat adalah manifestasi dari pemikiran dasar yang sama, yaitu *diferensial* atau *turunan*.

Definisi 1

Diferensial/turunan pertama fungsi f adalah fungsi lain f' (dibaca "f aksen") yang nilainya pada sebarang bilangan x adalah

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Jika limitnya ada.



Notasi turunan pertama adalah

$f'(x) = y' = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} = D_x f(x)$

$f'(x) = y'$ diperkenalkan oleh Joseph Louis Lagrange

$\frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx}$ diperkenalkan oleh Gottfried Leibniz

D dan $\frac{d}{dx}$ merupakan operator turunan

Dengan menggunakan definisi turunan mari kita buktikan rumus dasar turunan fungsi trigonometri untuk $y = \sin x$, $y = \sec x$, dan $y = \tan x$, untuk fungsi trigonometri lainnya, yaitu $y = \cos x$, $y = \csc x$, dan $y = \cot x$ diberikan sebagai latihan.

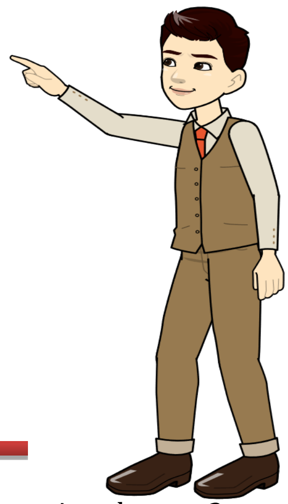
Contoh 1

Tentukan turunan pertama fungsi trigonometri $y = f(x) = \sin x$.

Penyelesaian:

Sebelum Anda menentukan turunan pertama fungsi trigonometri $y = f(x) = \sin x$, Anda harus mengingat kembali identitas trigonometri sudut rangkap, jumlah dan selisih sudut dan limit fungsi trigonometri.

Mengingat Kembali



- $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
- $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{1}{2}(x+y)\sin\frac{1}{2}(x-y)$
- $1 - \cos ax = 2\sin^2\frac{1}{2}(ax)$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{1}{2}x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{1}{2}x\sin\frac{1}{2}x}{x}$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{1}{2}x}{x}\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{2}x = 2.\frac{1}{2}.\sin(0) = 0$$

Anda akan disajikan menentukan turunan pertama fungsi $y = \sin x$ dengan 2 cara.

Cara 1

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$ (definisi turunan)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$ (substitusikan $f(x) = \sin x$)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h + \cos x\sin h - \sin x}{h}$$ ($\sin(x+h) = \sin x\cos h + \cos x\sin h$)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\sin h - \sin x\,(1-\cos h)}{h}$$ (sifat distributif)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\sin h}{h} - \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\,(1-\cos h)}{h}$$ (sifat limit)

$$= \cos x\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} - \sin x\lim_{h\to 0}\frac{(1-\cos h)}{h}$$ (sifat limit)

$$= \cos x(1) - \sin x\,(0)$$ (rumus limit)

$$= \cos x$$

Cara 2

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$ (definisi turunan)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$ (substitusikan $f(x) = \sin x$)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\frac{1}{2}(x+h+x)\sin\frac{1}{2}(x+h-x)}{h}$$ ($\sin x - \sin y = 2\cos\frac{1}{2}(x+y)\sin\frac{1}{2}(x-y)$)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{1}{2}h\right)\sin\frac{1}{2}h}{h}$$ (penyederhanaan)

$$= \lim_{h\to 0}2\cos\left(x+\frac{1}{2}h\right)\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{1}{2}h}{h}$$ (sifat limit)

$$= 2\cos x\,.\frac{1}{2}$$ (sifat limit)

$$= \cos x$$

Jadi, turunan pertama fungsi trigonometri $f(x) = \sin x$ adalah $f'(x) = \cos x$

Contoh 2

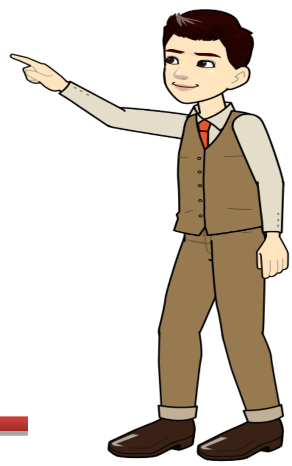
Tentukan turunan pertama fungsi trigonometri $y = f(x) = \sec x$.

Penyelesaian:

Sebelum Anda menentukan turunan pertama fungsi trigonometri $y = f(x) = \sec x$, Anda harus mengingat kembali identitas trigonometri sudut rangkap, jumlah dan selisih sudut dan limit fungsi trigonometri.

Mengingat Kembali

- $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ $\qquad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
- $\cos (x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
- $\cos x - \cos y = -2\sin \frac{1}{2}(x + y) \sin \frac{1}{2}(x - y)$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$



$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} && \text{(definisi turunan)}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sec(x+h) - \sec x}{h} && \text{(substitusikan } f(x) = \sec x\text{)}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{\cos(x+h)} - \frac{1}{\cos x}\right) && \left(\sec x = \tfrac{1}{\cos x}\right)\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{\cos x - \cos(x+h)}{\cos(x+h)\cos x}\right) && \text{(samakan penyebut)}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{\cos x - [\cos x \cos h - \sin x \sin h]}{\cos(x+h)\cos x}\right) && (\cos (x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y)\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{\cos x - \cos x \cos h + \sin x \sin h}{\cos(x+h)\cos x}\right) && \text{(penyederhanaan)}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{\cos x\,(1 - \cos h) + \sin x \sin h}{\cos(x+h)\cos x}\right) && \text{(sifat distributif)}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x\,(1 - \cos h)}{h\cos(x+h)\cos x} + \frac{\sin x \sin h}{h\cos(x+h)\cos x} && \text{(penyederhanaan)}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(1 - \cos h)}{h\cos(x+h)} + \frac{\sin x}{\cos x}\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h\cos(x+h)} && \text{(sifat limit)}\\
&= \frac{0}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}\frac{1}{\cos x} && \text{(sifat limit)}\\
&= \sec x \tan x
\end{aligned}
$$

Jadi, turunan pertama fungsi trigonometri $f(x) = \sec x$ adalah $f'(x) = \sec x \tan x$.

Contoh 3

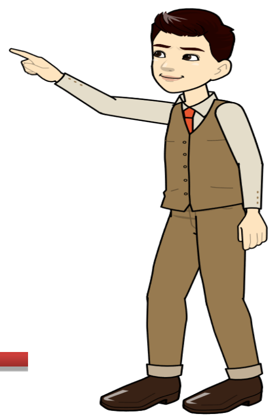
Tentukan turunan pertama fungsi trigonometri $y = f(x) = \tan x$.

Penyelesaian:

Sebelum Anda menentukan turunan pertama fungsi trigonometri $y = f(x) = \tan x$, Anda harus mengingat kembali identitas trigonometri, jumlah dan selisih sudut dan limit fungsi trigonometri.

Mengingat Kembali

- $\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$
- $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$



$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} && \text{(definisi turunan)}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\tan(x+h) - \tan x}{h} && \text{(substitusikan } f(x) = \tan x\text{)}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{\tan x + \tan h}{1 - \tan x \tan h} - \tan x\right) && \left(\tan(x+y) = \tfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}\right)\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{\tan x + \tan h - \tan x\,(1 - \tan x \tan h)}{1 - \tan x \tan h}\right) && \text{(samakan penyebut)}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{\tan x + \tan h - \tan x + \tan^2 x \tan h}{1 - \tan x \tan h}\right) && \text{(penyederhanaan)}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\tan h\,(1 + \tan^2 x)}{h(1 - \tan x \tan h)} && \text{(sifat distributif)}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\tan h}{h} \lim_{h\to 0} (1 + \tan^2 x) \lim_{h\to 0} \frac{1}{1 - \tan x \tan h} && \text{(sifat limit)}\\
&= (1)\,(1 + \tan^2 x)\,(1) && \text{(sifat limit)}\\
&= \sec^2 x && (1 + \tan^2 x = \sec^2 x)
\end{aligned}$$

Jadi, turunan fungsi trigonometri $f(x) = \tan x$ adalah $f'(x) = \sec^2 x$.

Sebagai lantihan Anda harus membuktikan turunan fungsi trigonometri berikut.

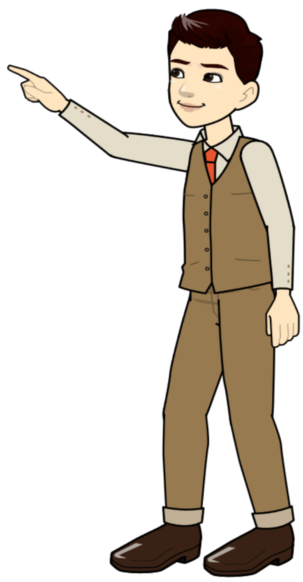
- $f(x) = \cos x \Rightarrow \quad f'(x) = -\sin x$
- $f(x) = \csc x \Rightarrow \quad f'(x) = -\csc x \cot x$
- $f(x) = \cot x \Rightarrow \quad f'(x) = -\csc^2 x$

Prinsip Turunan untuk Fungsi Trigonometri Sederhana

Proses pencarian turunan suatu fungsi menggunakan definisi, yakni $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ memakan waktu. Karena itu pada pembelajaran berikutnya kita akan menggunakan aturan pencarian turunan yang telah dipelajari di Kelas XI saat belajar turunan fungsi aljabar untuk memperpendek proses dari fungsi-fungsi yang tampak rumit.

Namun, sebelumnya kita ulas kembali aturan dasar pencarian turunan dari fungsi aljabar dan fungsi trigonometri.

Mengingat Kembali



- $f(x) = k \Rightarrow f'(x) = 0$, dengan k konstanta
- $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$
- $f(x) = k\,x^n \Rightarrow f'(x) = k.n.x^{n-1}$
- $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$
- $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$
- $f(x) = \tan x \Rightarrow f'(x) = \sec^2 x$
- $f(x) = \cot x \Rightarrow f'(x) = -\csc^2 x$
- $f(x) = \sec x \Rightarrow f'(x) = \sec x \tan x$
- $f(x) = \csc x \Rightarrow f'(x) = -\csc x \cot x$

Jika k suatu konstanta dan u, v adalah fungsi dari x dan terturunkan, maka aturan pencarian turunan fungsi aljabar berlaku juga pada turunan fungsi trigonometri .

1. Aturan Jumlah, Selisih, dan Perkalian dengan Konstanta

- $f(x) = k\,u \Rightarrow f'(x) = k\,u'$
- $f(x) = u + v \Rightarrow f'(x) = u' + v'$
- $f(x) = u - v \Rightarrow f'(x) = u' - v'$

dengan k konstanta, $u = u(x)$, dan $v = v(x)$

Contoh 4

Tentukan turunan pertama fungsi trigonometri berikut.

a. $f(x) = \sin x - \cos x$.
b. $f(x) = 3x^2 - 4\cos x$
c. $f(x) = 2\tan x + 3x$

Penyelesaian:

a. $f(x) = \sin x - \cos x$

pilih : $u = \sin x \Rightarrow u' = \cos x$
$v = \cos x \Rightarrow v' = -\sin x$

$f(x) = \sin x - \cos x = u - v$

maka

$f'(x) = u' - v'$
$f'(x) = \cos x - (-\sin x)$
$f'(x) = \cos x + \sin x$

b. $f(x) = 3x^2 - 4\cos x$

pilih : $u = x^2 \Rightarrow u' = 2x$
$v = \cos x \Rightarrow v' = -\cos x$

$k_1 = 3$ dan $k_2 = 4$

$f(x) = 3x^2 - 3\cos x = k_1u + k_2v$

maka

$f'(x) = k_1\,u' + k_2\,v'$

$f'(x) = 3\,(2x) - 3\,(-\sin x)$

$f'(x) = 6x + 3\sin x$

c. $f(x) = 2\tan x + 3x$

pilih : $u = \tan x \Rightarrow u' = \sec^2 x$

$v = x \Rightarrow v' = 1$

$k_1 = 2$ dan $k_2 = 3$

$f(x) = 2\tan x + 3x = k_1u + k_2v$

maka

$f'(x) = k_1\,u' + k_2\,v'$

$f'(x) = 2\sec^2 x + 3$

Contoh 5

Jika $f(x) = \sin x + \cos x + \tan x$, maka $f'(0) = \ldots$.

Penyelesaian:

$f(x) = \sin x + \cos x + \tan x$

$f'(x) = \cos x - \sin x + \sec^2 x$

$f'(0) = \cos 0 - \sin 0 + \sec^2 0$

$= 1 - 0 + 1$

$= 2$

2. Aturan Perkalian

$f(x) = u\,.\,v \Rightarrow f'(x) = u'.\,v + u\,.\,v'$ dengan $u = u(x)$ dan $v = v(x)$

Contoh 6

Tentukan turunan pertama fungsi trigonometri berikut.

a. $f(x) = x^2 \sin x$

b. $f(x) = 3x \sin x + \cot x$

c. $f(x) = 2\cos x \sin x$

Penyelesaian:

a. $f(x) = x^2 \sin x$

pilih $u = x^2 \Rightarrow u' = 2x$

$v = \sin x \Rightarrow v' = \cos x$

$f(x) = x^2 \sin x = u\,.\,v$

maka

$f'(x) = u'.\,v + u\,.\,v'$

$f'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$

b. $f(x) = 3x \sin x + \cot x$

pilih $u = 3x \Rightarrow u' = 3$

$v = \sin x \Rightarrow v' = \cos x$

$w = \cot x \Rightarrow w' = -\csc^2 x$

$f(x) = 3x \sin x + \cot x = u\,.\,v + w$

maka

$f'(x) = u'\,.\,v + u\,.\,v' + w'$

$f'(x) = 3\sin x + 3x\cos x + (-\csc^2 x)$

$= 3 \sin x + 3x \cos x - \csc^2 x$

c. $f(x) = 2 \cos x \sin x$

pilih $u = 2 \cos x \Rightarrow u' = -2 \sin x$

$v = \sin x \Rightarrow v' = \cos x$

$f(x) = 2 \cos x \sin x = u \cdot v$

maka

$f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$

$f'(x) = (-2 \sin x)(\sin x) + (2 \cos x)(\cos x)$

$f'(x) = -2 \sin^2 x + 2 \cos^2 x$

$f'(x) = 2 (\cos^2 x - \sin^2 x)$

$f'(x) = 2 \cos 2x$ $\qquad$ $(\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x)$

3. Aturan Pembagian

$f(x) = \frac{u}{v} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ dengan $u = u(x)$ dan $v = v(x)$

Contoh 7

Tentukan turunan pertama fungsi trigonometri berikut.

a. $f(x) = \tan x$

b. $f(x) = \frac{\cos x}{1 + \cos x}$

c. $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}$

Penyelesaian:

a. $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

pilih $u = \sin x \Rightarrow u' = \cos x$

$v = \cos x \Rightarrow v' = -\sin x$

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{u}{v}$$

maka

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{(\cos x)(\cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad (\cos^2 x + \sin^2 x = 1)$$

$$f'(x) = \sec^2 x \qquad \left(\frac{1}{\cos x} = \sec x\right)$$

Menunjukkan hasil yang sama dengan turunan $f(x) = \tan x$ menggunakan definisi.

b. $f(x) = \frac{\cos x}{1 + \cos x}$

pilih $u = \cos x \Rightarrow u' = -\sin x$

$v = 1 + \cos x \Rightarrow v' = -\sin x$

$$f(x) = \frac{\cos x}{1 + \cos x} = \frac{u}{v}$$

maka

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$
$$f'(x) = \frac{(-\sin x)(1+\cos x) - (\cos x)(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$$
$$f'(x) = \frac{-\sin x - \sin x \cos x + \cos x \sin x}{(1+\cos x)^2}$$
$$f'(x) = \frac{-\sin x}{(1+\cos x)^2}$$

c. $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}$

pilih $u = \cos x \Rightarrow u' = -\sin x$

$v = \sin x + \cos x \Rightarrow v' = \cos x - \sin x$

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} = \frac{u}{v}$$

maka

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$
$$f'(x) = \frac{(-\sin x)(\sin x + \cos x) - (\cos x)(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-\sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x + \cos x \sin x}{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x}$$
$$f'(x) = \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{1 + \sin 2x} \qquad (2\sin x \cos x = \sin 2x)$$
$$f'(x) = \frac{-1}{1 + \sin 2x} \qquad (\cos^2 x + \sin^2 x = 1)$$

C. Rangkuman

- Diferensial/turunan pertama fungsi f adalah fungsi lain f' (dibaca "f aksen") yang nilainya pada sebarang bilangan x adalah

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

  Jika limitnya ada.

- Rumus dasar turunan pertama fungsi trigonometri
  - $f(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \cos x$
  - $f(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\sin x$
  - $f(x) = \tan x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \sec^2 x$
  - $f(x) = \cot x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\csc^2 x$
  - $f(x) = \sec x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \sec x \tan x$
  - $f(x) = \csc x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\csc x \cot x$

- Jika k suatu konstanta dan u, v adalah fungsi dari x dan terturunkan, maka aturan pencarian turunan fungsi aljabar berlaku juga pada turunan fungsi trigonometri .
  - $f(x) = k\,u \quad \Rightarrow \quad f'(x) = k\,u'$
  - $f(x) = u + v \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u' + v'$
  - $f(x) = u - v \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u' - v'$
  - $f(x) = u \,.\, v \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u' .\, v + u \,.\, v'$
  - $f(x) = \frac{u}{v} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

D. Latihan Soal

Kerjakan latihan soal berikut dengan jujur dan benar.

1. Buktikan rumus dasar turunan fungsi trigonometri berikut dengan definisi.
   a. $f(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\sin x$
   b. $f(x) = \csc x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\csc x \cot x$
   c. $f(x) = \cot x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\csc^2 x$
2. Tentukan turunan pertama fungsi trigonometri berikut.
   a. $f\ (x) = 3x \sin x + \cos x$
   b. $f\ (x) = 2x \cos x - x^3$
   c. $f\ (x) = \frac{\cos x}{5+\sin x}$
3. Tentukan $f'(x)$ dan nilai $f'(x)$ dari fungsi $f(x) = 3x - \cos x + \tan x$ untuk $x = \frac{\pi}{3}$.
4. Tentukan $f'(x)$ untuk $f(x) = \cos^3(2x - 1)$

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2

Aturan Rantai, Turunan Kedua, dan Laju yang Berkaitan dari Fungsi Trigonometri

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 2 ini, diharapkan Anda dapat menerapkan Aturan Rantai dalam menentukan turunan fungsi komposisi trigonometri, menentukan turunan kedua fungsi trigonometri, dan menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan turunan fungsi trigonometri khususnya laju yang berkaitan.

B. Uraian Materi

Aturan Rantai

Andaikan Anda diminta menentukan turunan fungsi $F(x) = \cos(3x - 5)$. Rumus turunan yang telah Anda pelajari tidak memungkinkan Anda untuk menghitung $F'(x)$.

Amati oleh Anda bahwa F berupa fungsi komposisi. Pada kenyataannya, andaikan $y = f(u) = \cos u$ dan $u = g(x) = 3x - 5$, maka kita dapat menuliskan $y = F(x) = f(g(x))$, yakni $F = f \circ g$. Kita ketahui bagaimana menentukan turunan fungsi f dan g, sehingga akan bermanfaat sebagai aturan yang memberitahu kita bagaimana menurunkan $F = f \circ g$ dalam bentuk turunan dari f dan g.

Ternyata turunan fungsi komposisi adalah hasil kali turunan f dan g. Fakta ini merupakan salah satu dari aturan turunan yang terpenting dan disebut **Aturan Rantai**.

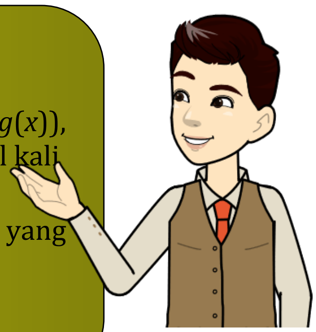
Aturan Rantai

Jika f dan g keduanya fungsi fungsi yang dapat diturunkan dan $F = f \circ g$ adalah fungsi komposisi yang didefinisikan oleh $F = f(g(x))$, maka F dapat diturunkan menjadi F' yang diberikan oleh hasil kali

$$F'(x) = f'\big(g(x)\big)g'(x) \qquad (1)$$

Dalam notasi Leibniz, jika $y = f(u)$ dan $u = g(x)$ keduanya fungsi yang dapat diturunkan, maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \qquad (2)$$



Untuk lebih memahami lagi tentang aturan rantai pelajari contoh beriku.

Contoh 1

Carilah $F'(x)$ jika $F(x) = \cos(3x - 5)$.

Penyelesaian:

- **Menggunakan persamaan (1)**
  - Nyatakan F sebagai $F(x) = f \circ g\,(x) = f(g(x))$, dengan $f(u) = \cos u$ dan $u = g(x) = 3x - 5$
  - Cari turunan dari f dan g
    $f'(u) = -\sin u$
    $f'(g(x)) = -\sin g(x) = -\sin(3x - 5)$
    dan $g'(x) = 3$

- Cari $F'(x)$

  $F'(x) = f'\big(g(x)\big)g'(x)$

  $= -\sin(3x-5).\,(3)$

  $= -3\sin(3x-5)$

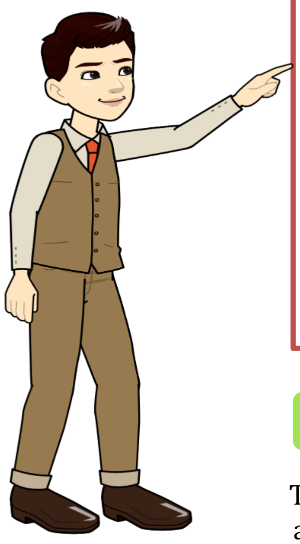
❖ **Menggunakan persamaan (2)**

Misalkan $u = 3x - 5 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3$

dan $y = \cos u \;\Rightarrow \frac{dy}{du} = -\sin u$

maka

$$F'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = -\sin u\ (3) = -3\sin u = -3\sin(3x-5)$$



Catatan:
Dalam menggunakan aturan rantai kita bekerja dari luar ke dalam. Rumus (1) mengatakan bahwa kita menurunkan fungsi sebelah luar f (pada fungsi lebih dalam $g(x)$) *dan kemudian kita kalikan dengan turunan fungsi sebelah dalam*.

$$\frac{d}{dx}\underbrace{f}_{\substack{\text{fungsi}\\\text{sebelah}\\\text{luar}}}\underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{dihitung}\\\text{pada fungsi}\\\text{sebelah}\\\text{dalam}}} = \underbrace{f'}_{\substack{\text{turunan}\\\text{fungsi}\\\text{sebelah}\\\text{luar}}}\underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{dihitung}\\\text{pada fungsi}\\\text{sebelah}\\\text{dalam}}}\cdot\underbrace{g'(x)}_{\substack{\text{turunan}\\\text{fungsi}\\\text{sebelah}\\\text{dalam}}}$$

Contoh 2

Tentukan turunan pertama dari fungsi trigonometri berikut.

a. $y = \sin(x^2 - 3x)$

b. $y = \sin^2 x$

Penyelesaian:

a. Jika $y = \sin(x^2 - 3x)$, maka fungsi sebelah luar adalah fungsi sinus dan fungsi sebelah dalam adalah fungsi kuadrat, sehingga aturan rantai memberikan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\underbrace{\sin}_{\substack{\text{fungsi}\\\text{sebelah}\\\text{luar}}}\underbrace{(x^2-3x)}_{\substack{\text{dihitung}\\\text{pada fungsi}\\\text{sebelah}\\\text{dalam}}} = \underbrace{\cos}_{\substack{\text{turunan}\\\text{fungsi}\\\text{sebelah}\\\text{luar}}}\underbrace{(x^2-3x)}_{\substack{\text{dihitung}\\\text{pada fungsi}\\\text{sebelah}\\\text{dalam}}}\cdot\underbrace{(2x-3)}_{\substack{\text{turunan}\\\text{fungsi}\\\text{sebelah}\\\text{dalam}}}$$

$$\frac{dy}{dx} = (2x-3)\cos(x^2-3x)$$

b. Jika $y = \sin^2 x = (\sin x)^2$, maka fungsi sebelah luar adalah fungsi kuadrat dan fungsi sebelah dalam adalah fungsi sinus, sehingga aturan rantai memberikan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\underbrace{(\sin x)^2}_{\substack{\text{fungsi}\\\text{sebelah}\\\text{luar}}} = \underbrace{2}_{\substack{\text{turunan}\\\text{fungsi}\\\text{sebelah}\\\text{luar}}}\underbrace{(\sin x)}_{\substack{\text{dihitung}\\\text{pada fungsi}\\\text{sebelah}\\\text{dalam}}}\cdot\underbrace{(\cos x)}_{\substack{\text{turunan}\\\text{fungsi}\\\text{sebelah}\\\text{dalam}}}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2\sin x\cos x$$

$= \sin 2x$ $\qquad$ ($\sin 2x = 2\sin x\cos x$)

Dari Contoh 2 dapat disimpulkan sebagai berikut.

Aturan Rantai

$y = k\,u^n \quad \Rightarrow \quad y' = k\,n\,u^{n-1} \,.\, u'$
$y = \sin u \quad \Rightarrow \quad y' = \cos u \,.\, u'$
$y = \cos u \quad \Rightarrow \quad y' = -\sin u \,.\, u'$
$y = \tan u \quad \Rightarrow \quad y' = \sec^2 u \,.\, u'$
$y = \cot u \quad \Rightarrow \quad y' = -\csc^2 u \,.\, u'$
$y = \sec u \quad \Rightarrow \quad y' = \sec u \tan u \,.\, u'$
$y = \csc u \quad \Rightarrow \quad y' = -\csc u \cot u \,.\, u'$

dengan k kostanta dan $u = u(x)$

Contoh 3

Tentukan turunan pertama dari fungsi trigonometri berikut.

a. $y = \cos(3x^2 - 5)$
b. $y = \tan^2 x$

Penyelesaian:

a. $y = \cos(3x^2 - 5)$
$y = \cos u \quad \Rightarrow \quad y' = -\sin u \,.\, u'$
$y = \cos(3x^2 - 5) \Rightarrow y = -\sin(3x^2 - 5) \,.\, (6x) = -6x \sin(3x^2 - 5)$

b. $y = \tan^2 x = (\tan x)^2$
$y = k\,u^n \quad \Rightarrow \quad y' = k\,n\,u^{n-1} \,.\, u'$
$y = \tan^2 x = (\tan x)^2 \quad \Rightarrow \quad y' = 2 \tan x \,.\, (\sec^2 x) = 2 \tan x \,.\, \sec^2 x$

Alasan untuk nama "Aturan Rantai" menjadi jelas pada waktu kita membuat rantai yang lebih panjang dengan cara menambahkan mata rantai lain. Andaikan bahwa $y = f(u)$, $u = g(v)$, dan $v = h(x)$, dengan fungsi f, g, dan dapat diturunkan. Maka, untuk menghitung turunan y terhadap x, kita gunakan Aturan rantai dua kali:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}$$

Contoh 4

Tentukan turunan pertama dari fungsi trigonometri $y = \sin^3(2x^2 - 3x)$

Penyelesaian:

Cara 1

$y = \sin^3(2x^2 - 3x)$

Misalkan $v = 2x^2 - 3x \Rightarrow \frac{dv}{dx} = 4x - 3$

$u = \sin v \quad \Rightarrow \frac{du}{dv} = \cos v$

$y = u^3 \quad \Rightarrow \frac{dy}{du} = 3u^2$

maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}$$

$= 3u^2 \cos v\,(4x - 3)$

$= 3(\sin v)^2 \cos(2x^2 - 3x)\,(4x - 3)$
$= 3 \sin^2(2x^2 - 3x) \cos(2x^2 - 3x)\,(4x - 3)$
$= 3\,(4x - 3) \sin^2(2x^2 - 3x) \cos(2x^2 - 3x)$
$= (12x - 9) \sin^2(2x^2 - 3x) \cos(2x^2 - 3x)$

Cara 2

Fungsi sebelah luar adalah fungsi kubik, fungsi tengah adalah fungsi sinus, dan fungsi dalam adalah fungsi kuadrat.

$$\frac{dy}{dx} = 3\sin^2(2x^2 - 3x)\frac{d}{dx}(\sin(2x^2 - 3x))$$
$$= 3\sin^2(2x^2 - 3x)(\cos(2x^2 - 3x))\frac{d}{dx}(2x^2 - 3x)$$
$$= 3\sin^2(2x^2 - 3x)\cos(2x^2 - 3x)\left(4x \quad - 3\right)$$
$$= (12x - 9)\sin^2(2x^2 - 3x)\cos(2x^2 - 3x)$$

Cara 3

$y = \sin^n u \qquad \Rightarrow y' = n \sin^{n-1} u . \cos u . u'$

$y = \sin^3 (2x^2 - 3x) \qquad \Rightarrow y' = 3 \sin^2 (2x^2 - 3x). \cos (2x^2 - 3x). (4x - 3)$

$\qquad y' = (12x - 9) \sin^2 (2x^2 - 3x). \cos (2x^2 - 3x). (4x - 3)$

Jadi, untuk aturan rantai lainnya diperoleh:

Aturan Rantai

$y = \sin^n u \Rightarrow y' = n \sin^{n-1} u . \cos u . u'$

$y = \cos^n u \Rightarrow y' = -n \cos^{n-1} u . \sin u . u'$

$y = \tan^n u \Rightarrow y' = n \tan^{n-1} u . \sec^2 u . u'$

$y = \cot^n u \Rightarrow y' = -n \cot^{n-1} u . \csc^2 u . u'$

$y = \sec^n u \Rightarrow y' = n \sec^{n-1} u . \sec u \tan u . u'$

$y = \csc^n u \Rightarrow y' = -n \csc^{n-1} u . \csc u \cot u . u'$

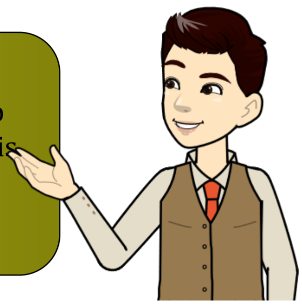
dengan $u = u(x)$

Turunan Kedua

Jika f fungsi yang terturunkan, maka turunannya f' juga berupa fungsi, sehingga f' boleh jadi mempunyai turunan tersendiri, yang dinyatakan oleh $(f')' = f''$. Fungsi f'' yang baru ini disebut turunan kedua dari f karena dia berupa turunan dari turunan f.

Definisi 1

Jika $f'(x)$ (turunan pertama suatu fungsi) diturunkan lagi terhadap x, maka akan diperoleh turunan kedua fungsi $f(x)$ terhadap x, ditulis dengan $f''(x)$ atau y'' atau $\frac{d^2 f}{dx^2}$ atau $\frac{d^2 y}{dx^2}$ atau $D^2 f(x)$.



Contoh 5

Tentukan turunan kedua fungsi trigonometri berikut.

a. $y = \sin (3x + \pi)$

b. $y = \cos^2 x$

c. $y = x \cos x$

Penyelesaian :

a. $y = \sin (3x + \pi)$

$y' = 3 \cos (3x + \pi)$ (turunan $y = \sin u$ adalah $y' = u' \cos u$)

$y'' = -9 \sin (9x + \pi)$ (turunan $y = \cos u$ adalah $y' = -u' \sin u$)

b. $y = \cos^2 x$
$y' = -2 \cos x \sin x$ (turunan $y = u^2$ adalah $y' = 2u \cdot u'$)
$y' = -\sin 2x$ ($\sin 2x = 2 \sin x \cos x$)
$y'' = -2 \cos 2x$ (turunan $y = \sin u$ adalah $y' = u' \cos u$)

c. $y = x \cos x$
$y' = \cos x - x \sin x$ ($y = uv \Rightarrow y' = u'v + uv'$)
$y'' = -\sin x - (\sin x + x \cos x)$ ($y = uv \Rightarrow y' = u'v + uv'$)
$y'' = -2 \sin x - x \cos x$

Laju yang Berkaitan

Hal utama dalam persoalan laju yang berkaitan adalah menghitung laju perubahan suatu besaran dalam bentuk laju perubahan besaran lain (yang boleh jadi jauh lebih mudah diukur). Jika variabel y tergantung kepada waktu, maka turunannya $\frac{dy}{dt}$ disebut **laju sesaat perubahan**. Tentu saja, jika y mengukur jarak, maka laju sesaat perubahan ini juga disebut kecepatan (v). Laju sesaat dari perubahan kecepatan akan menghasilkan percepatan (a).

- kecepatan $v \Rightarrow v(t) = \frac{dy}{dt} = y'(t)$
- percepatan $a \Rightarrow a(t) = \frac{dv}{dt} = v'(t) = \frac{d^2y}{dt^2} = y''(t)$

Kita tertarik pada beraneka laju sesaat, laju air mengalir ke dalam ember, laju membesarnya luas pencemaran minyak, laju bertambahnya nilai kapling tanah, dan lain-lain.

Strategi untuk pemecahan masalah khususnya mengenai laju yang berkaitan, adalah:
1. Baca masalah secara seksama.
2. Gambarkan diagram jika mungkin.
3. Perkenalkan notasi. Berikan lambing kepada semua besaran yang merupakan fungsi waktu.
4. Nyatakan informasi yang diketahui dan laju yang diperlukan dalam bentuk turunan.
5. Tuliskan persamaan yang mengaitkan beragam besaran dari masalah tersebut. Jika perlu, gunakan geometri untuk menghilangkan satu peubah melalui substitusi.
6. Gunakan aturan rantai untuk menurunkan kedua ruas persamaan terhadap t.
7. Substitusikan informasi yang diketahui ke dalam persamaan yang dihasilkan dan pecahkan untuk laju yang tidak diketahui tersebut.

Contoh 6

Sebuah gelombang transversal merambat dengan persamaan $y = 0{,}1 \sin\left(\frac{1}{4}\pi t - \frac{1}{4}\pi x\right)$. Sebuah penelitian dilakukan pada jarak 2 meter dari pusat gelombang. Berapakah kecepatan dan percepatan partikel gelombang itu pada saat detik ke-3?

Penyelesaian:

$$y = 0{,}1 \sin\left(\frac{1}{4}\pi t - \frac{1}{4}\pi x\right)$$

Persamaan kecepatan dan percepatan gelombang tersebut adalah:

$v = y' = \left(\frac{1}{4}\pi\right) 0{,}1 \cos\left(\frac{1}{4}\pi t - \frac{1}{4}\pi x\right) = 0{,}025\pi \cos\left(\frac{1}{4}\pi t - \frac{1}{4}\pi x\right)$, dan

$a = v' = y'' = \left(\frac{1}{4}\pi\right) 0{,}025\pi \sin\left(\frac{1}{4}\pi t - \frac{1}{4}\pi x\right) = 0{,}00625\pi^2 \sin\left(\frac{1}{4}\pi t - \frac{1}{4}\pi x\right)$

Pada saat $t = 3$ detik dan $x = 2$ meter, maka

$$
\begin{aligned}
v &= 0{,}025\pi\cos\left(\tfrac{1}{4}\pi(3) - \tfrac{1}{4}\pi(2)\right)\\
&= 0{,}025\pi\cos\left(\tfrac{1}{4}\pi\right)\\
&= 0{,}025\pi\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)\\
&= 0{,}0125\pi\sqrt{2}\\
&\approx 0{,}056
\end{aligned}
$$

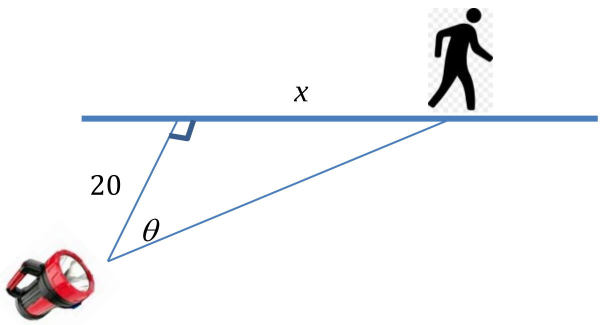
$$
\begin{aligned}
a &= 0{,}00625\pi^2\sin\left(\tfrac{1}{4}\pi(3) - \tfrac{1}{4}\pi(2)\right)\\
&= 0{,}00625\pi^2\sin\left(\tfrac{1}{4}\right)\\
&= 0{,}00625\pi^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\\
&\approx 0{,}0436
\end{aligned}
$$

Jadi, kecepatan partikel gelombang pada detik ke-3 di posisi 2 meter dari pusat gelombang adalah 0,056 m/detik dan percepatan partikel gelombangnya adalah 0,0436 m^2/detik.

Contoh 7

Seseorang berjalan menurut tapak lurus pada kecepatan 4 meter/detik. Lampu pencari terletak di tanah sejauh 20 meter dari tapak dan tetap dipusatkan pada orang itu. Pada laju berapa lampu pencari berputar jika orang itu berada 15 meter dari titik pada tapak yang terdekat ke lampu pencari?

Penyelesaian:



Kita lukiskan seperti gambar di atas dan misalkan x adalah jarak dari titik pada tapak yang terdekat ke lampu pencari ke orang tersebut. Kita misalkan θ adalah sudut antara sinar lampu pencari dan garis tegak lurus pada tapak.

Diketahui bahwa $\frac{dx}{dt}$ = 4 meter/detik dan diminta mencari $\frac{d\theta}{dt}$ pada saat x = 15. Persamaan yang mengaitkan x dan θ dapat dituliskan berdasarkan Gambar.

$$\frac{x}{20} = \tan\theta$$

$$x = 20\tan\theta$$

Dengan menurunkan masing-masing ruas terhadap t, diperoleh

$$\frac{dx}{dt} = 20\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt}$$

Sehingga

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{20}\cos^2\theta\frac{dx}{dt} = \frac{1}{20}\cos^2\theta(4) = \frac{1}{5}\cos^2\theta$$

Pada saat x = 15, panjang sinar adalah 25, sehingga $\cos\theta = \frac{4}{5}$ dan

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{125} = 0{,}128$$

Jadi, lampu pencari berputar pada laju 0,128 radian/detik.

C. Rangkuman

- Jika f dan g keduanya fungsi fungsi yang dapat diturunkan dan $F = f \circ g$ adalah fungsi komposisi yang didefinisikan oleh $F = f(g(x))$, maka F dapat diturunkan menjadi F' yang diberikan oleh hasil kali
$$F'(x) = f'\big(g(x)\big)g'(x)$$
Dalam notasi Leibniz, jika $y = f(u)$ dan $u = g(x)$ keduanya fungsi yang dapat diturunkan, maka
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx}$$
- Misalkan $u = u(x)$, maka rumus umum turunan fungsi trigonometri adalah:
  - $y = \sin^n u \Rightarrow y' = n \sin^{n-1} u\ .\cos u\ .\ u'$
  - $y = \cos^n u \Rightarrow y' = -n \cos^{n-1} u\ .\ \sin u\ .\ u'$
  - $y = \tan^n u \Rightarrow y' = n \tan^{n-1} u\ .\ \sec^2 u\ .\ u'$
  - $y = \cot^n u \Rightarrow y' = -\,n \cot^{n-1} u\ .\csc^2 u\ .\ u'$
  - $y = \sec^n u \Rightarrow y' = n \sec^{n-1} u\ .\sec u \tan u\ .\ u'$
  - $y = \csc^n u \Rightarrow y' = -\,n \csc^{n-1} u\ .\csc u \cot u\ .\ u'$
- Jika $f'(x)$ (turunan pertama suatu fungsi) diturunkan lagi terhadap x, maka akan diperoleh turunan kedua fungsi $f(x)$ terhadap x, ditulis dengan $f''(x)$ atau y'' atau $\frac{d^2 f}{dx^2}$ atau $\frac{d^2 y}{dx^2}$.
- Laju yang berkaitan adalah menghitung laju perubahan suatu besaran dalam bentuk laju perubahan besaran lain (yang boleh jadi jauh lebih mudah diukur). Jika variabel y tergantung kepada waktu, maka turunannya $\frac{dy}{dt}$ disebut laju sesaat perubahan.

D. Latihan Soal

Kerjakan latihan soal berikut dengan jujur dan benar.

1. Tentukan turunan pertama dari fungsi trigonometri berikut.
   a. $f(x) = \cos(4x - \pi)$
   b. $f(x) = \cos^5(3 - 2x)$
   c. $f(x) = x\cos^2 2x - 2x^3$
2. a. Jika $f(x) = 4\cos^3 x$, maka tentukan nilai $f'(x)$ untuk $x = \frac{\pi}{3}$
   b. Jika $f(x) = \sin^2(2x + \frac{\pi}{6})$, maka tentukan nilai $f'(0)$.
3. Tentukan turunan kedua dari fungsi trigonometri berikut.
   a. $y = \cos(2x + \pi)$
   b. $y = \sin^2 x$
4. Sebuah gelombang transversal merambat dengan persamaan $y = 2\sin(5\pi t - \pi x)$. Sebuah penelitian dilakukan pada jarak 4 meter dari pusat gelombang. Berapakah kecepatan dan percepatan partikel gelombang itu pada saat detik ke-2?
5. Disebuah menara yang tingginya 100 m dari atas tanah, seorang penjaga pantai melihat sebuah kapal mendekat dengan laju 5 m/s. Tentukan laju perubahan sudut depresi penjaga pantai terhadap waktu pada saat jarak kapal terhadap menara 100 m.