KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
Limit di Ketakhinggaan Fungsi Aljabar

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini, diharapkan Anda dapat menjelaskan dan menentukan limit di ketakhinggaan fungsi aljabar serta dapat menyelesaikan masalah berkaitan dengan eksistensi limit di ketakhinggaan fungsi aljabar.

B. Uraian Materi

Pada pelajaran matematika wajib kelas XI, Anda telah belajar mengenai definisi limit fungsi aljabar yaitu bahwa suatu limit fungsi f(x) dikatakan mendekati a {f(x), a} sebagai suatu limit. Bila x mendekati a, dinotasikan limit F(x) = L. Cara menyelesaikan limit fungsi aljabar, terdapat 3 cara untuk menyelesaikan limit fungsi aljabar yaitu dengan metode (1) substitusi langsung; (2) pemfaktoran; (3) merasionalkan. Nahhh semoga Anda masih mengingat ini yaa...

Pada kegiatan pembelajaran ini kalian akan belajar bagaimana menyelesaikan limit fungsi di ketakhinggaan. Sebelum belajar bagaimana cara menyelesaikan limit fungsi di ketakhinggaan, kita kenalan dulu yuk sama yang namanya tak hingga. Jika kita berbicara tentang definisi, definisi dari simbol tak hingga (*Infinity*) adalah sebuah konsep abstrak yang menggambarkan sesuatu yang tanpa batas dan relevan dalam sejumlah bidang, terutama matematika dan fisika. Tak hingga diberi simbol ∞ "sesuatu" yang lebih besar dari bilangan manapun tetapi sesuatu itu BUKAN bilangan, dengan kata lain **tidak ada bilangan yang lebih besar dari ∞**.

$$\boxed{a < \infty, \forall a \in R \text{ dan } \infty \notin R}$$

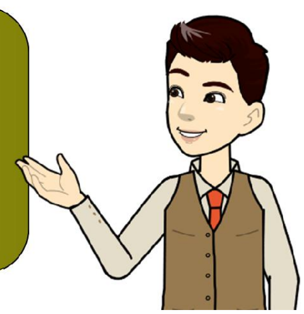
Karena ∞ bukan sebuah bilangan, maka ∞ tidak ganjil, tidak genap dan tidak prima. Dalam kamus matematika Carol Vorderman, definisi tak hingga adalah tanpa batas-batas ukuran atau jumlah, tidak terbatas, tidak ada akhirnya.

Definisi 1

Misalkan f adalah fungsi yang didefinisikan pada suatu interval (a, ∞). Maka

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

Bermakna bahwa nilai $f(x)$ dapat dibuat sebarang dekat ke L dengan cara mengambil x cukup besar.



Cara menyelesaikan limit di ketakhinggaan dibagi menjadi 3, yaitu (1) substitusi langsung; (2) membagi dengan pangkat tertinggi; (3) merasionalkan penyebut. Sebagai materi prasyarat pada bahasan limit fungsi di ketakhinggaan, Anda harus mengingat kembali cara merasionalkan penyebut. Kalo Anda lupa gak perlu khawatir, di modul ini akan disajikan contoh soal beserta cara penyelesaiannya secara rinci.

Okay.. berikut ini kita simak bersama satu persatu cara menyelesaikan limit fungsi di ketakhinggaan.

Metode Substitusi Langsung

Penerapan metode substitusi langsung dalam menentukan atau menyelesaikan limit fungsi di ketakhinggan sangat mudah, sama halnya dengan limit fungsi aljabar, yakni dengan langsung mengganti x atau variabel lain dengan angka yang tertera di soal, seperti berikut:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Hal ini berlaku pula untuk limit fungsi di ketakhinggaan:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = f(\infty)$$

Sebagai contoh, gunakan metode substitusi untuk menentukan nilai Limit fungsi berikut :

1. $\lim_{x \to \infty} x + 3 = \infty + 3 = \infty$
2. $\lim_{x \to \infty} x^2 + 2x - 4 = (\infty)^2 + 2(\infty) - 4 = \infty + \infty - 4 = \infty$

Membagi dengan Pangkat Tertinggi

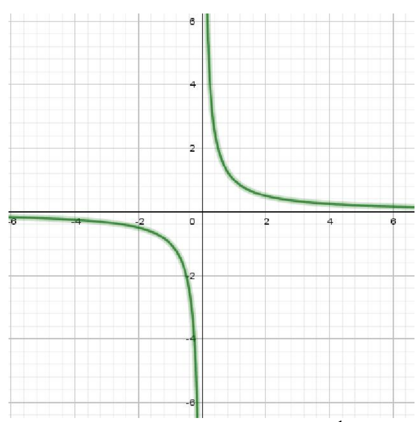
Misal kita akan mencari nilai $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$

Amati bahwa ketika x cukup besar, $\frac{1}{x}$ semakin kecil. Misalkan

$$\frac{1}{10} = 0{,}1 \qquad \frac{1}{100} = 0{,}01 \qquad \frac{1}{10.000} = 0{,}0001 \qquad \frac{1}{1.000.000} = 0{,}000001$$

Nyatanya, dengan mengambil x cukup besar, kita dapat membuat $\frac{1}{x}$ sedekat yang diinginkan ke 0. Oleh karena itu, menurut definisi 1, kita mempunyai

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$



Gambar 1 sungsi $y = \frac{1}{x}$

Teorema limit yang diberikan pada modul sebelumnya berlaku juga untuk limit di ketakhinggaan. Berdasarkan contoh di atas kita peroleh aturan penting untuk perhitungan limit berikut.

Teorema

Jika $r > 0$ adalah bilangan rasional, maka

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

Agar Anda dapat memahami cara penyelesaian soal limit fungsi di ketakhinggaan, Anda dapat memperhatikan contoh soal berikut:

1. Tentukan nilai $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2-2x+3}{x+3}$

   Perhatikan contoh soal nomor 1 tersebut, dapat Anda lihat soal tersebut memuat pangkat tertinggi yaitu x^2. Oleh karena itu kita bagi semua komponen dalam fungsi tersebut dengan x^2 seperti ini:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2-2x+3}{x+3} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2} + \frac{3}{x^2}}{\frac{x}{x^2} + \frac{3}{x}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{3}{x}}$$

$$= \frac{\lim_{x \to \infty} 1 - \lim_{x \to \infty} \frac{2}{x} + \lim_{x \to \infty} \frac{3}{x^2}}{\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} + \lim_{x \to \infty} \frac{3}{x^2}} \quad \text{(sifat limit)}$$

$$= \frac{1-0+0}{0+0} \quad \text{(teorema 1)}$$

$$= \infty$$

Sebuah bilangan jika dibagi dengan tak hingga atau bilangan yang sangaaattttt besar, makanya nilainya akan mendekati NOL

2. Tentukan nilai $\lim_{x \to \infty} \frac{2x+3}{3x^2+5x-2}$

   Nah untuk soal ini, Anda lihat bahwa pangkat tertinggi adalah x^3 sehingga Anda dapat membagi semua komponen dengan x^3. Begini yaa..

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x+3}{3x^2+5x-2} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2x}{x^2} + \frac{3}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{5x}{x^2} - \frac{2}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{3 + \frac{5}{x} - \frac{2}{x^2}}$$

$$= \frac{0+0}{3+0-0}$$

$$= \frac{0}{3}$$

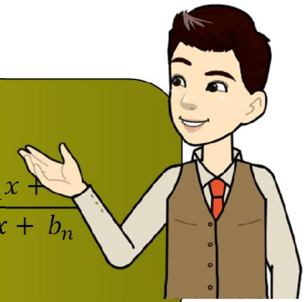
$$= 0$$

Sebuah bilangan jika dibagi dengan tak hingga atau bilangan yang sangaaattttt besar, makanya nilainya akan mendekati NOL

3. Tentukan nilai dari $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^4+2}{3-5x^4} = -\frac{3}{5}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^4+2}{3-5x^4} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{3x^4}{x^4} + \frac{2}{x^4}}{\frac{3}{x^4} - \frac{5x^4}{x^4}} = \lim_{x \to \infty} \frac{3 + \frac{2}{x^4}}{\frac{3}{x^4} - \frac{5x^4}{x^4}} = \frac{3+0}{0-5} = -\frac{3}{5}$$

Okay.. kita lihat kembali secara seksama ketiga contoh tersebut, untuk nomor satu Anda dapat lihat bahwa pangkat tertinggi terdapat di bagian pembilang dan hasil dari limitnya adalah ∞. Lalu untuk contoh soal nomor dua, pangkat tertingginya ada di bagian penyebut, dan hasil limitnya adalah 0. Kemudian contoh soal ketiga, baik pembilang maupun penyebut mempunyai pangkat tertinggi yang sama, dan menghasilkan nilai limit sama dengan $-\frac{3}{5}$. Jika Anda jeli menyimak, kita dapat menyimpulkan ketiga contoh soal tersebut menjadi bentuk umum limit di ketakhinggaan fungsi aljabar sebagai berikut:



Bentuk Umum 1

Untuk $a\ dan\ b\ \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to\infty} f\ (x) = \lim_{x\to\infty} \frac{a_1x^m + a_2x^{m-1} + a_3x^{m-2} + \ldots + a_{n-1}x +}{b_1x^p + b_2x^{p-1} + b_3x^{p-2} + \ldots + b_{n-1}x + b_n}$$

- Jika $m > p$, maka $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$
- Jika $\mathrm{m} < \mathrm{p}$, maka $\lim_{x\to\infty} \mathrm{f(x)} = 0$
- $Jika\ m = p$, maka $\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{a_1}{b_1}$

Wahh ternyata setelah kita simpulkan bersama, tampak mudah yaa pengerjaan limit dengan cara membagi dengan pangkat tertinggi, gak ribet dan gak pakai sulit. Pasti dapat langsung mengerjakannya dengan sekejap.

Menggunakan rumus umum di atas maka untuk mengerjakan soal berikut pasti mudah.

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+5x-7}{10x^3+5x} = 0$ karena m $<$ p
2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(3x^2-4)^2}{6x^4+3x^2-5x+1} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ karena m = p
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2x-1)^4}{(3x-1)(5x^2+x)} = \infty$ karena m > p

Merasionalkan

Pada bagian ini Anda akan diajak mengenang masa lalu saat Anda belajar merasionalkan penyebut di SMP, jangan ditinggalkan yaa kenangan masa lalu nya (hehehe), karena secara konsep masih sama dan berlaku dalam penyelesaian limit fungsi di ketakhinggaan ini. Mengapa harus dengan merasionalkan?? Dari namanya juga merasionalkan, maka kita bertujuan agar fungsi irasional yang diberikan dalam limit tak hingga tersebut dapat berubah menjadi rasional sehingga memudahkan dalam pengerjaan soalnya. Okay Anda perhatikan contoh soal berikut:

1. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+2x-3} - \sqrt{x+2} = \cdots$

Cara menyelesaikan soal ini, kita akan mengalikan dengan bentuk sekawan dari fungsi tersebut yakni $\frac{\sqrt{x^2+2x-3}\ +\ \sqrt{x+2}}{\sqrt{x^2+2x-3}\ +\ \sqrt{x+2}}$ (ingat kembali pelajaran merasionalkannya yaa...).

Penyelesaian:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+2x-3} - \sqrt{x+2}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+2x-3} - \sqrt{x+2}\ .\frac{\sqrt{x^2+2x-3}\ +\ \sqrt{x+2}}{\sqrt{x^2+2x-3}\ +\ \sqrt{x+2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} x^2+2x-3 - (x+2)\ .\frac{1}{\sqrt{x^2+2x-3}\ +\ \sqrt{x+2}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + x - 5}{\sqrt{x^2 + 2x - 3} + \sqrt{x + 2}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} - \frac{5}{x^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^4} + \frac{2x}{x^4} - \frac{3}{x^4}} + \sqrt{\frac{x}{x^4} + \frac{2}{x^4}}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2}}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^4}} + \sqrt{\frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^4}}}$$

$$= \frac{1 + 0 - 0}{\sqrt{0 + 0 - 0} + \sqrt{0 + 0}} = \frac{1}{0} = \infty$$

2. $\lim_{x \to \infty} \sqrt{5x - 3} - \sqrt{x^2 + 7} = \cdots$

Penyelesaian:

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{5x - 3} - \sqrt{x^2 + 7} = \lim_{x \to \infty} \sqrt{5x - 3} - \sqrt{x^2 + 7} . \frac{\sqrt{5x - 3} + \sqrt{x^2 + 7}}{\sqrt{5x - 3} + \sqrt{x^2 + 7}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{5x - 3 - (x^2 + 7)}{\sqrt{5x - 3} + \sqrt{x^2 + 7}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{5x}{x^2} - \frac{3}{x^2} - \frac{x^2}{x^2} - \frac{7}{x^2}}{\sqrt{\frac{5x}{x^4} - \frac{3}{x^4}} + \sqrt{\frac{x^2}{x^4} + \frac{7}{x^4}}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{5}{x} - \frac{3}{x^2} - 1 - \frac{7}{x}}{\sqrt{\frac{5x}{x^3} - \frac{3}{x^4}} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{7}{x^4}}}$$

$$= \frac{0 - 0 - 1 - 0}{\sqrt{0 - 0} + \sqrt{0 + 0}} = -\frac{1}{0} = -\infty$$

3. $\lim_{x \to \infty} \sqrt{4x^2 - 4x + 5} - \sqrt{(2x + 1)^2} = \cdots$

Penyelesaian :

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{4x^2 - 4x + 5} - \sqrt{(2x + 1)^2} = \lim_{x \to \infty} \sqrt{4x^2 - 4x + 5} - \sqrt{4x^2 + 4x + 1}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \sqrt{4x^2 - 4x + 5} - \sqrt{4x^2 + 4x + 1} \;.\; \frac{\sqrt{4x^2 - 4x + 5} + \sqrt{4x^2 + 4x + 1}}{\sqrt{4x^2 - 4x + 5} + \sqrt{4x^2 + 4x + 1}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{4x^2 - 4x + 5 - (4x^2 + 4x + 1)}{\sqrt{4x^2 - 4x + 5} + \sqrt{4x^2 + 4x + 1}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{-8x + 4}{\sqrt{4x^2 - 4x + 5} + \sqrt{4x^2 + 4x + 1}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{-8x}{x} + \frac{4}{x}}{\sqrt{\frac{4x^2}{x^2} - \frac{4x}{x^2} + \frac{5}{x^2}} + \sqrt{\frac{4x^2}{x^2} + \frac{4x}{x^2} + \frac{1}{x}}}$$

$$= \frac{-8 + 0}{\sqrt{4 - 0 + 0} + \sqrt{4 + 0 + 0}} = \frac{-8}{2 + 2} = \frac{-8}{4} = -2$$

Bagaimana Anda setelah melihat ketiga contoh soal tersebut? Apakah merasa pusing? Hmmm... tenang.. kita simak lagi yuk contohnya (Anda lihat soalnya lagi yaa..). Bentuk soal nomor 1 dan 2 adalah $\lim_{x \to \infty} \sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}$. Perhatikan pangkat tertingginya deh.

Untuk soal nomor 1 pangkat tertinggi ada di $f(x)$ maka hasil limitnya sama dengan ∞. Soal kedua pangkat tertinggi ada di $g(x)$ maka hasilnya sama dengan $-\infty$, sedangkan untuk soal nomor 3 baik $f(x)$ maupun $g(x)$ pangkat nya sama yaitu x^2, dan hasilnya sama dengan -2.
Jadi... yuk kita buat rumus umum untuk bentuk soal di atas secara singkat sebagai berikut:

Bentuk Umum 2

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{px^2+qx+r} = \begin{cases} \dfrac{b-q}{2\sqrt{a}} & \text{jika } a = p \\ \infty & \text{jika } a > p \\ -\infty & \text{jika } a < p \end{cases}$$

dengan $a, b, c, p, q, r \in R$

Berdasarkan bentuk umum2 tentukan nilai limit di ketakhinggan berikut.

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{2x^2+3x-6} - \sqrt{2x^2-x+4}\right) = \frac{b-q}{2\sqrt{a}} = \frac{3-(-1)}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$
2. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{3x^2+4x+1} - \sqrt{(x-1)^2}$
   $= \lim_{x\to\infty} \sqrt{3x^2+4x+1} - \sqrt{x^2-2x+1} = \infty$ karena $a > p$
3. $\lim_{x\to\infty} (x+2) - \sqrt{2x^2-4x+1}$
   $= \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{(x+2)^2} - \sqrt{2x^2-4x+1}$
   $= \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+4x+1} - \sqrt{2x^2-4x+1}$

   $= -\infty$ karena $a < p$

Aplikasi Limit Fungsi di Ketakhinggaan Fungsi Aljabar

Bagaimana cara menyelesaikan masalah yang berhubungan dengan konsep limit fungsi di ketakhinggaan fungsi aljabar ? untuk memahaminya pelajari contoh berikut.

Contoh

Beberapa ilmuwan sedang meneliti suatu senyawa. Senyawa ini merupakan hasil reaksi kimia dari beberapa senyawa. Setelah diteliti ternyata jumlah senyawa baru yang terbentuk mengikuti fungsi $f(t) = \frac{2t^2+3t+4}{(3+2t)(t-1)}$, dengan $f(t)$ menyatakan jumlah senyawa dalam milligram dan t waktu dalam detik. Tentukan jumlah senyawa yang terbentuk untuk jangka waktu yang sangat lama adalah ….

Penyelesaian:

Waktu yang sangat lama artinya $t \to \infty$

$$f(t) = \frac{2t^2+3t+4}{(3+2t)(t-1)} = \frac{2t^2+3t+4}{2t^2+t-3}$$

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{2t^2+3t+4}{2t^2+t-3} = 1$$

(karena pangkat tertinggi pembilang dan penyebut sama)
Jadi, senyawa yang terbentuk dalam waktu yang sangat lama adalah 1 miligram.

Asimtot Datar

Asimtot adalah suatu garis lurus yang didekati oleh lengkung dengan jarak semakin lama semakin kecil mendekati nol di tak hingga. Asimtot juga diartikan sebagai garis batas atau garis arah kelengkungan kurva dan ada pada domain tertentu. Asimtot datar adalah suatu garis yang mendekati nilai y tertentu tidak melewati atau menyinggungnya.

Garis $y = L$ disebut asimtot datar dari fungsi $f(x)$ jika memenuhi salah satu dari:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \text{ atau } \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

Contoh

Tentukan asimtot datar untuk fungsi fungsi tigonometri berikut.

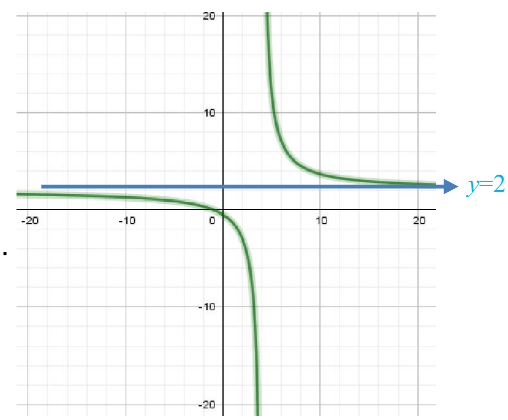
$f(x) = \frac{2x+2}{x-4}$

Penyelesaian:

Asimtot datar fungsi tersebut adalah:

$y = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+2}{x-4} = 2$

Jadi, asimtot datar dari fungsi di atas adalah $y = 2$.



C. Rangkuman

- $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ artinya limit $f(x)$ seraya x mendekati tak hingga, adalah L.
- $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{a_1x^m + a_2x^{m-1} + a_3x^{m-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_1x^p + b_2x^{p-1} + b_3x^{p-2} + \ldots + b_{n-1}x + b_n}$;
  - Jika $m > p$, maka $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$
  - Jika m $<$ p, maka $\lim_{x\to\infty} \mathrm{f(x)} = 0$
  - $Jika\ m = p$, maka $\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{a_1}{b_1}$
- $\lim_{x\to\infty} \sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{px^2+qx+r} = \begin{cases} \frac{b-q}{2\sqrt{a}} & \text{jika } a = p \\ \infty & \text{jika } a > p \\ -\infty & \text{jika } a < p \end{cases}$
- Asimtot adalah suatu garis lurus yang didekati oleh lengkung dengan jarak semakin lama semakin kecil mendekati nol di tak hingga.
- Asimtot datar adalah suatu garis yang mendekati nilai y tertentu tidak melewati atau menyinggungnya.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2
Limit di Ketakhinggaan Fungsi Trigonometri

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 2 ini, diharapkan Anda dapat menjelaskan dan menentukan limit di ketakhinggaan fungsi trigonometri serta dapat menyelesaikan masalah berkaitan dengan eksistensi limit di ketakhinggaan fungsi trigonometri.

B. Uraian Materi

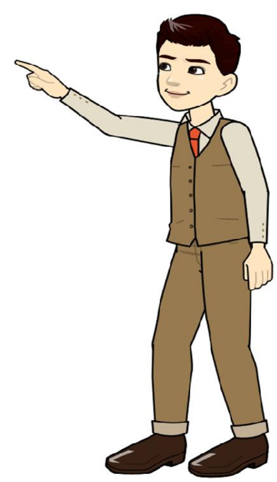
Pada kegiatan pembelajaran 2 ini kita akan membahas Limit Tak Hingga Fungsi Trigonometri. Materi Limit Tak Hingga Fungsi Trigonometri merupakan gabungan bentuk limit di ketakhinggaan dan limit fungsi trigonometri. Jika kita perdalam lagi, ternyata bentuk Limit Tak Hingga Fungsi Trigonometri lebih menekankan pada limit fungsi trigonometrinya, sehingga Anda harus benar-benar menguasai materi limit fungsi trigonometri pada modul sebelumnya.

Bentuk tak hingga (∞) jika sebagai sudut suatu fungsi trigonometri maka tidak bisa ditentukan nilainya misal sin (∞), cos (∞), tan (∞) tidak bisa ditentukan nilainya karena nilai sin x berkisar $-1 \le \sin x \le 1$, begitu juga niai cos x berkisar $-1 \le \cos x \le 1$, dan untuk tan x berkisar $-\infty \le \tan x \le \infty$, tentu dengan x yang sudah pasti. Nah untuk memudahkan, maka bentuk yang digunakan adalah $\frac{1}{\infty} \approx 0$, sehingga nilai fungsi trigonometrinya bisa kita hitung yaitu $\sin \frac{1}{\infty} = 0$, $\cos \frac{1}{\infty} = 1$, $\tan \frac{1}{\infty} = 0$. Dan bentuk ini cocok dengan limit fungsi trigonometri yang akan di bahas dalam kegiatan belajar ini.

Limit fungsi trigonometri yang sudah dipelajari pada modul sebelumnya dan identitas trigonometri materi prasyarat untuk memahami konsep limit di ketakhinggaan fungsi trigonometri.

Mengingat Kembali

Rumus dasar limit fungsi trigonometri yang diperumum adalah:



1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$
7. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$
8. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$
9. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{1}{x^r} = 0$

Rumus Trigonometri

- $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{1}{2}(x + y)\sin\frac{1}{2}(x - y)$
- $1 - \cos ax = 2\sin^2\frac{1}{2}(ax)$
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Langkah-langkah menentukan limit di ketakhinggaan fungsi trigonometri.

4. Lakukan pemisalan $y = \frac{1}{x}$.
5. Substitusikan $y = \frac{1}{x}$ ke persamaan awal
6. Selesaikan dengan rumus dasar limit fungsi trigonometri.
7. Tentukan hasil limitnya.

Agar Anda lebih memahami modul ini, pelajari beberapa contoh soal dari limit di ketakhinggaan fungsi trigonometri.

Contoh 1

Tentukan limit di ketakhinggaan fungsi tigonometri berikut.

1. $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{2}{x}\right)$
2. $\lim\limits_{x\to\infty} \tan\frac{5}{x}\csc\frac{2}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5\tan\frac{3}{x}}{x\left(1 - \cos\frac{6}{x}\right)}$
4. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cos^2\frac{6}{x} - 1}{\sin\frac{3}{x}\tan\frac{2}{x}}$
5. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x(\cos\frac{3}{x} - \cos\frac{1}{x})}{\sin\frac{2}{x}}$

Penyelesaian:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{2}{x}\right)$
   - Misalkan $y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y}$

     Ketika $x \to \infty$ maka $\frac{1}{x} \to 0$ atau $y \to 0$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{2}{x}\right) &= \lim_{\frac{1}{x}\to 0}\frac{1}{\frac{1}{x}}\sin\left(\frac{2}{x}\right)\\ &= \lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\sin(2y)\\ &= \lim_{y\to 0}\frac{\sin 2y}{y}\\ &= 2\end{aligned}$$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \tan\frac{5}{x}\csc\frac{2}{x}$
   - Misalkan $y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y}$

     Ketika $x \to \infty$ maka $\frac{1}{x} \to 0$ atau $y \to 0$

$$\lim_{x\to\infty} \tan\frac{5}{x}\csc\frac{2}{x} = \lim_{\frac{1}{x}\to 0} \tan 5.\frac{1}{x}\csc 2.\frac{1}{x}$$
$$= \lim_{y\to 0} \tan 5y \csc 2y$$
$$= \lim_{y\to 0} \frac{\tan 5y}{\sin 2y}$$
$$= \frac{5}{2}$$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5\tan\frac{3}{x}}{x\left(1-\cos\frac{6}{x}\right)}$

❖ Misalkan $y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y}$

Ketika $x \to \infty$ maka $\frac{1}{x} \to 0$ atau $y \to 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5\tan\frac{3}{x}}{x\left(1-\cos\frac{6}{x}\right)} = \lim_{\frac{1}{x}\to 0} \frac{1}{x}\frac{5\tan\frac{3}{x}}{\left(2\sin^2\frac{3}{x}\right)}$$
$$= \lim_{y\to 0} y\frac{5\tan 3y}{(2\sin^2 3y)}$$
$$= \lim_{y\to 0} \frac{5}{2}\frac{y}{\sin 3y}\frac{\tan 3y}{\sin 3y}$$
$$= \frac{5}{2}\frac{1}{3}\frac{3}{3}$$
$$= \frac{5}{6}$$

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\cos^2\frac{6}{x}-1}{\sin\frac{3}{x}\tan\frac{2}{x}}$

❖ Misalkan $y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y}$

Ketika $x \to \infty$ maka $\frac{1}{x} \to 0$ atau $y \to 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\cos^2\frac{6}{x}-1}{\sin\frac{3}{x}\tan\frac{2}{x}} = \lim_{\frac{1}{x}\to 0} \frac{\cos^2\frac{6}{x}-1}{\sin\frac{3}{x}\tan\frac{2}{x}}$$
$$= \lim_{y\to 0} \frac{\cos^2 6y - 1}{\sin 3y \tan 2y}$$
$$= \lim_{y\to 0} \frac{-\sin^2 6y}{\sin 3y \tan 2y}$$
$$= \lim_{y\to 0} \frac{-\sin 6y \sin 6y}{\sin 3y \tan 2y}$$
$$= -\frac{6}{3}.\frac{6}{2}$$
$$= -6$$

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x(\cos\frac{3}{x}-\cos\frac{1}{x})}{\sin\frac{2}{x}}$

❖ Misalkan $y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y}$

Ketika $x \to \infty$ maka $\frac{1}{x} \to 0$ atau $y \to 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x(\cos\frac{3}{x}-\cos\frac{1}{x})}{\sin\frac{2}{x}} = \lim_{\frac{1}{x}\to 0} \frac{1}{\frac{1}{x}}\frac{(\cos\frac{3}{x}-\cos\frac{1}{x})}{\sin\frac{2}{x}}$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{\cos 3y - \cos y}{y \sin 2y}$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{-2 \sin 2y \sin y}{y \sin 2y}$$

$$= \lim_{y \to 0} -2 \frac{\sin 2y \ \ \sin y}{y \ \ \ \ \sin 2y}$$

$$= (-2)(2)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= -2$$

Aplikasi Limit Fungsi di Ketakhinggaan Fungsi Trigonometri

Bagaimana cara menyelesaikan masalah yang berhubungan dengan konsep limit fungsi di ketakhinggaan fungsi trigonometri ? untuk memahaminya pelajari contoh berikut.

Contoh 2

Jumlah pertumbuhan penduduk suatu kota diperkirakan t tahun dari sekarang akan menjadi $N(t)$ = 35.000 + t sin $\frac{40.000}{t}$

Tentukan pertumbuhan jumlah penduduk kota tersebut dalam jangka waktu yang sangat lama di masa depan.

Penyelesaian:

Waktu yang sangat lama artinya $t \to \infty$

$N(t)$ = 35.000 + $t \sin \frac{40.000}{t}$

$$\lim_{t \to \infty} N(t) = \lim_{t \to \infty} \ 35.000 \ + \ t \sin \frac{40.000}{t}$$

❖ Misalkan $y = \frac{1}{t} \Rightarrow t = \frac{1}{y}$

Ketika $t \to \infty$ maka $\frac{1}{t} \to 0$ atau $y \to 0$

$$\lim_{t \to \infty} N(t) = \lim_{t \to \infty} \ 35.000 \ + \ t \sin \frac{40.000}{t}$$

$$= \lim_{t \to \infty} \ 35.000 \ + \lim_{t \to \infty} t \sin \frac{40.000}{t}$$

$$= 35.000 + \lim_{\frac{1}{t} \to 0} \frac{1}{\frac{1}{t}} \sin \frac{40.000}{t}$$

$$= 35.000 + \frac{\sin 40.000\, y}{y}$$

$$= 35.000 + 40.000$$

$$= 75.000$$

Jadi, pertumbuhan jumlah penduduk kota tersebut dalam jangka waktu yang sangat lama di masa depan adalah 75.000.

Asimtot Datar

Asimtot adalah suatu garis lurus yang didekati oleh lengkung dengan jarak semakin lama semakin kecil mendekati nol di tak hingga. Asimtot juga diartikan sebagai garis batas atau garis arah kelengkungan kurva dan ada pada domain tertentu. Asimtot datar adalah suatu garis yang mendekati nilai y tertentu tidak melewati atau menyinggungnya.

Garis $y = L$ disebut asimtot datar dari fungsi $f(x)$ jika memenuhi salah satu dari:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \text{ atau } \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

Contoh 3

Tentukan asimtot datar untuk fungsi fungsi tigonometri berikut.

$f(x) = x\tan\left(\frac{1}{x}\right)$

Penyelesaian:

Asimtot datar fungsi tersebut adalah:

$y = \lim\limits_{x\to\infty} x\tan\left(\frac{1}{x}\right)$

- ❖ Misalkan $z = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{z}$

  Ketika $x \to \infty$ maka $\frac{1}{x} \to 0$ atau $z \to 0$

$$\begin{aligned} y = \lim_{x\to\infty} x\tan\left(\frac{1}{x}\right) &= \lim_{\frac{1}{x}\to 0} \frac{1}{\frac{1}{x}}\tan\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \lim_{z\to 0}\frac{1}{z}\sin(z) \\ &= \lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Jadi, asimtot datar dari fungsi di atas adalah $y = 1$.

C. Rangkuman

- ❖ Langkah-langkah menentukan limit di ketakhinggaan fungsi trigonometri.
  - ➢ Lakukan pemisalan $y = \frac{1}{x}$.
  - ➢ Substitusikan $y = \frac{1}{x}$ ke persamaan awal
  - ➢ Selesaikan dengan rumus dasar limit fungsi trigonometri.
  - ➢ Tentukan hasil limitnya.
- ❖ Asimtot adalah suatu garis lurus yang didekati oleh lengkung dengan jarak semakin lama semakin kecil mendekati nol di tak hingga.
- ❖ Asimtot datar adalah suatu garis yang mendekati nilai y tertentu tidak melewati atau menyinggungnya.

D. Latihan Soal

Kerjakan latihan soal berikut dengan jujur dan benar.

Tentukan limit di ketakhinggaan fungsi tigonometri berikut.

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{x}\cot\left(\frac{1}{x}\right)$