KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
Pengertian dan sifat-sifat Limit Fungsi

A. Tujuan Pembelajaran

Anak-anak, setelah kegiatan pembelajaran 1 ini kalian diharapkan dapat memahami tentang ...

1. Pengertian Limit Fungsi
2. Sifat – Sifat Limit Fungsi

B. Uraian Materi

Pengertian Limit Fungsi

Anak-anak, pernahkah kalian mencoba menghitung kecepatan dan percepatan yang dialami sebuah mobil yang bergerak selama t sekon? Jika persamaan gerak mobil tersebut memenuhi persamaan $s(t) = (t^2 + 4t)$ meter, maka berapakah kecepatan dan percepatan mobil tersebut tepat pada saat $t = 3$ sekon?. Permasalahan di atas merupakan permasalahan pada bidang Fisika yang pemecahannya menggunakan bantuan konsep limit fungsi.

Gambar 1. Mobil melaju dengan cepat
Sumber : https://images.app.goo.gl/YuzUW8udBUF4fZGD7

Limit Fungsi adalah nilai pendekatan di sekitar titik tertentu baik pendekatan dari kiri maupun pendekatan dari kanan titik tersebut.

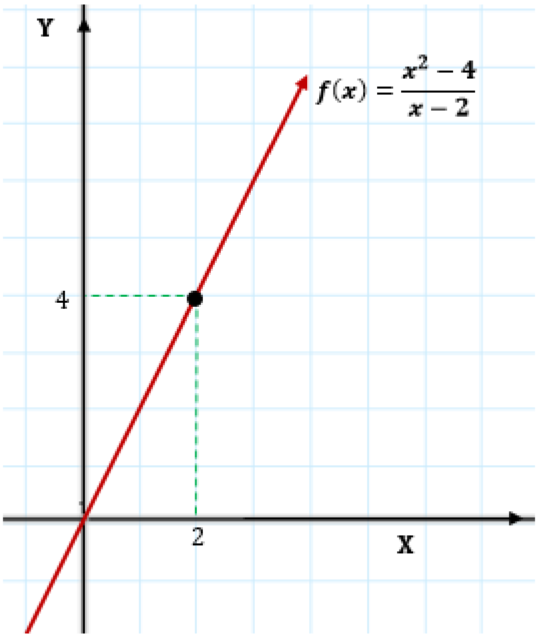
Untuk lebih jelasnya perhatikan ilustrasi berikut :
Misalkan terdapat suatu fungsi $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}, x \neq 2$. Tentukan nilai $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ jika ada !
Untuk menentukan limit fungsi aljabar di $x \to a$ kita bisa menggunakan tabel seperti berikut.

x mendekati 2 dari kiri					↓	x mendekati 2 dari kanan				
x	1,8	1,9	1,99	1,9999	2	2,000001	2,0001	2,001	2,05	2,1
$f(x)$	3,8	3,9	3,99	3,9999	...	4,000001	4,0001	4,001	4,05	4,1
$f(x)$ mendekati 4					↑	$f(x)$ mendekati 4				

Jika kita subtitusi nilai-nilai x dari kiri maka nilainya akan mendekati 4, sedangkan jika kita subtitusi nilai-nilai x dari kanan maka nilainya akan mendekati 4 juga. Hal ini dapat dituliskan sebagai berikut.

$\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$ dan $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$ jadi $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$

Jika disajikan dalam grafik seperti berikut



Gambar 2: Fungsi $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$
Sumber: koleksi pribadi

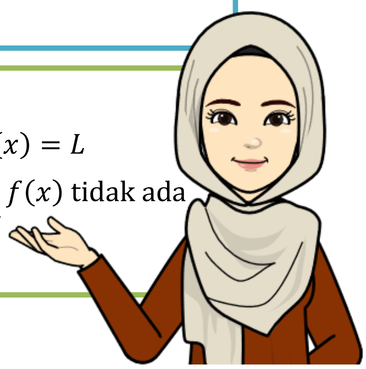
Jadi, nilai $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$ adalah 4

Secara matematis limit dapat didefinisikan sebagai berikut.

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ artinya jika x mendekati a,tetapi x tidak sama dengan a, maka nilai $f(x)$ mendekati nilai L

Jika fungsi $f(x)$ terdefinisi pada selang terbuka I, maka:

a. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ (ada) jika dan hanya jika $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$ dan $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$
b. Jika $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L_1$ dan $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L_2$ dimana $L_1 \neq L_2$ maka $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ tidak ada



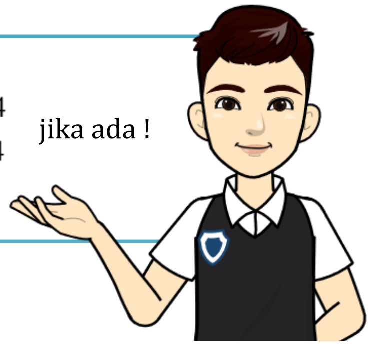
Keterangan :

- $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ dibaca limit $f(x)$ untuk nilai x yang mendekati a dari kanan $(x > a)$
- $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ dibaca limit $f(x)$ untuk nilai x yang mendekati a dari kiri $(x < a)$

Biar makin paham simak contoh berikut ya…

Contoh Soal 1:

Tentukan limit f(x) untuk fungsi $f(x)=\begin{cases}2x & \text{, untuk x} \le 4\\ 2x+3, & \text{untuk x} > 4\end{cases}$ jika ada !



Pembahasan :

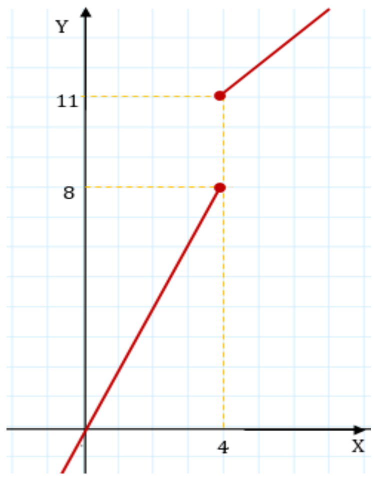
Untuk menentukan limit fungsi aljabar di $x \to a$ kita bisa menggunakan tabel seperti berikut.

x mendekati 4 dari kiri					↓	x mendekati 4 dari kanan				
x	3,9	3,95	3,99	3,9999	4	4,00001	4,0001	4,001	4,01	4,1
$f(x)$	7,80	7,90	7,98	7,9998	…	11,00002	11,0002	11,002	11,02	11,2
$f(x)$ mendekati 8					↑	$f(x)$ mendekati 11				

Tabel di atas menunjukkan : $\lim_{x\to 4^-} f(x)=8$ dan $\lim_{x\to 4^+} f(x)=11$

(limit kiri ≠ limit kanan), sehingga $\lim_{x\to 4} f(x)$ tidak ada.

Untuk lebih jelasnya perhatikan gambar berikut.



Gambar 3: Grafik fungsi $f(x)=\begin{cases}2x & \text{, untuk x} \le 4\\ 2x+3, & \text{untuk x} > 4\end{cases}$

Sumber: koleksi pribadi

Catatan :

Secara konsep dasar matematika, cara mengerjakan soal matematika yang ada limitnya, hanya tinggal mengganti/mensubtitusi variabel $\boldsymbol{x}$ menjadi angka yang didekati oleh x tersebut.

Contoh Soal 2:

Anak – anak, coba perhatikan limit fungsi di bawah ini

$$\lim_{x\to 1} \frac{5x^3+7x^{14}+6}{8x^5+4x^9-6}$$

Berapakah hasil nilai limit dari data diatas ?
$A.$ 3
$B.$ 0
$C.$ 7
$D.$ 6
$E.$ ∞

Pembahasan:
Pada limit diatas, untuk mencari hasil nilai limitnya, kalian hanya tinggal mensubtitusi atau mengganti variabel x dengan angka 1, sehingga hasil limitnya menjadi

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{5x^3+7x^{14}+6}{8x^5+4x^9-6} &= \frac{5.1^3+7.1^{14}+6}{8.1^5+4.1^9-6} \\ &= \frac{18}{6} \\ &= 3\end{aligned}$$

Jadi, nilai limit tersebut adalah **3 (Jawaban: A)**

Sifat-sifat Limit Fungsi

Misalkan f(x) dan g(x) adalah fungsi yang mempunyai nilai limit pada x mendekati a, dengan k dan a adalah bilangan real serta n adalah bilangan bulat positif, maka sifat-sifat limit fungsi antara lain:

1. $\lim\limits_{x\to a} k = k$

   Contoh:
   $\lim\limits_{x\to 2} 3 = 3$

2. $\lim\limits_{x\to a} x = a$

   Contoh:
   $\lim\limits_{x\to 2} x = 2$

3. $\lim\limits_{x\to a} [kf(x)] = k\left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]$

   Contoh:
   $$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} 3x^2 &= 3\left[\lim_{x\to 2} x^2\right] \\ &= 3.(2)^2 \\ &= 3.4 \\ &= 12\end{aligned}$$

4. $\lim\limits_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Contoh:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}(x^2+2x) &= \lim_{x\to 3} x^2 + \lim_{x\to 3} 2x \\ &= 3^2 + 2.\lim_{x\to 3} x \\ &= 9 + 2.3 \\ &= 9 + 6 \\ &= 15\end{aligned}$$

5. $\lim\limits_{x\to a}[f(x).g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x).\lim\limits_{x\to a} g(x)$

Contoh:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}(x^2.x) &= \lim_{x\to 2} x^2.\lim_{x\to 2} x \\ &= (-2)^2.(-2) \\ &= 4.(-2) \\ &= -8\end{aligned}$$

6. $\lim\limits_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ $dengan\ \lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$

Contoh:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\left[\frac{x^2+3}{x+1}\right] &= \frac{\lim\limits_{x\to 1} x^2 + \lim\limits_{x\to 1} 3}{\lim\limits_{x\to 1} x + \lim\limits_{x\to 1} 1} \\ &= \frac{1^2+3}{1+1} \\ &= \frac{1+3}{2} \\ &= \frac{4}{2} \\ &= 2\end{aligned}$$

7. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^n$

Contoh:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}[3x^2-1]^5 &= \left[\lim_{x\to 1}(3x^2-1)^5\right] \\ &= [3(1)^2-1]^5 \\ &= [3-1]^5 \\ &= [2]^5 \\ &= 32\end{aligned}$$

8. $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)}\ dengan\ n\ bilangan\ asli, n \geq 2\ dan\ \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)} \in R$

Contoh :

$$\lim_{x \to 5} \sqrt[3]{x^2 + 2} = \sqrt[3]{\lim_{x \to 5} (x^2 + 2)}$$
$$= \sqrt[3]{\lim_{x \to 5} x^2 + \lim_{x \to 5} 2}$$
$$= \sqrt[3]{5^2 + 2}$$
$$= \sqrt[3]{25 + 2}$$
$$= \sqrt[3]{27}$$
$$= \sqrt[3]{3^3}$$
$$= 3^{\frac{3}{3}}$$
$$= 3^1$$
$$= 3$$

Itulah sifat-sifat atau teorema limit beserta contoh soal dan penyelesaiannya, semoga kalian paham ya dengan apa yang sudah dijelaskan di atas.

Untuk lebih jelasnya penggunaan sifat di atas perhatikan contoh berikut:

Contoh Soal 1:

Anak-anak, coba perhatikan limit fungsi dibawah ini

$$\lim_{x \to 2} 2x + 3\,x^2$$

terapkan sifat limit dan berapa hasil nilai limit fungsi di atas ?

A. 16
B. 7
C. 5
D. $2\sqrt{2}$
E. $\sqrt{3}$

Pembahasan:

Anak – anak, pada soal diatas kita diminta untuk menerapkan sifat limit dan mencari nilai limit dari

$$\lim_{x \to 2} 2x + 3\,x^2$$

Pada limit fungsi diatas, kita terapkan sifat limit yang nomor 4 ya, sehingga:

$$\lim_{x \to 2} 2x + 3\,x^2 = \lim_{x \to 2} 2x + \lim_{x \to 2} 3\,x^2$$
$$= 2 \cdot 2 + 3 \cdot (2)^2$$
$$= 4 + 3 \cdot 4$$
$$= 4 + 12$$
$$= 16$$

Jadi, nilai hasil limitnya adalah 16 **(Jawaban: A)**

Contoh Soal 2 :

Anak-anak, sekali lagi perhatikan limit fungsi dibawah ini

$$\lim_{x \to -3} (x^2 - 5)^3 = \cdots$$

terapkan sifat limit dan berapa hasil nilai limit fungsi di atas ?

A. 4
B. 8
C. 27
D. 64
E. 81

Pembahasan:
pada soal di atas kita diminta untuk menerapkan sifat limit dan mencari nilai limit dari

$$\lim_{x \to 3} (x^2 - 5)^3 = \cdots$$

Pada limit fungsi diatas, kita terapkan sifat limit yang nomor 7 ya, sehingga

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 3} (x^2 - 5)^3 &= \left(\lim_{x \to -3} (x^2 - 5)\right)^3 \\ &= ((-3)^2 - 5)^3 \\ &= (9 - 5)^3 \\ &= (4)^3 \\ &= 64 \end{aligned}$$

Jadi, nilai hasil limitnya adalah 64 (**Jawaban: D)**

C. Rangkuman

1. Pengertian Limit Fungsi

Limit Fungsi adalah nilai pendekatan di sekitar titik tertentu baik pendekatan dari kiri maupun pendekatan dari kanan titik tersebut.

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ artinya jika x mendekati a,tetapi x tidak sama dengan a, maka nilai $f(x)$ mendekati nilai L

Jika fungsi $f(x)$ terdefinisi pada selang terbuka I, maka:

a. $\lim_{x \to a} f(x) = L$ (ada) jika dan hanya jika $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ dan $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

b. Jika $\lim_{x \to a^-} f(x) = L_1$ dan $\lim_{x \to a^+} f(x) = L_2$ dimana $L_1 \neq L_2$ maka $\lim_{x \to a} f(x)$ tidak ada

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2
Limit Fungsi Aljabar

A. Tujuan Pembelajaran

Anak-anak setelah kegiatan pembelajaran 2 ini kalian diharapkan dapat:
1. Memahami limit fungsi aljabar
2. Menentukan nilai limit fungsi aljabar
3. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan limit fungsi aljabar

B. Uraian Materi

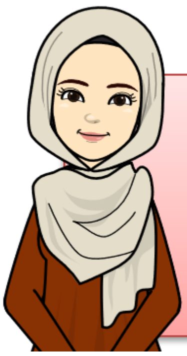
Anak – anak, jika kalian menemukan sebuah limit fungsi $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$ dan disubtitusikan $x = 2$, maka hasilnya adalah $\frac{0}{0}$. Dalam limit, ini tidak boleh dan harus diubah.

Bagaimana cara merubahnya ya?

Secara konsep matematika, cara merubah bentuk limit yang hasilnya $\frac{0}{0}$ (bentuk tak tentu), kita menggunakan dua cara, yakni cara **memfaktorkan** dan **merasionalkan (mengalikan dengan akar sekawan)**. Mau tau caranya? Simak pembahasan selanjutnya ya…
Nah berikutnya kita akan membahas metode penyelesaian limit bentuk tak tentu dengan pemfaktoran dan mengalikan dengan akar sekawan.
Sebelum membahas contoh soal dengan pemfaktoran kalian harus tahu dulu bentuk hasil limit. Bentuk hasil limit dibedakan menjadi dua yaitu **bentuk tentu** dan **bentuk tak tentu.**

Hasil limit Bentuk Tentu:
$\left(a, \frac{a}{b}, \frac{a}{0} = \infty, \frac{0}{b} = 0\right)$ dengan $a, b \in R$

Hasil limit Bentuk Tentu:
$\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, \infty^{\infty}\right)$ dengan $a, b \in R$



Catatan

Dengan menggunakan metode substitusi, jika hasilnya bentuk tentu maka bentuk tentu itulah hasil limitnya. Tapi jika hasilnya merupakan bentuk tak tentu, maka harus diselesaikan dengan menggunakan metode faktorisasi atau mengalikan dengan akar sekawan.

Agar kalian paham dengan hasil bentuk tentu dan tak tentu, perhatikan contoh-contoh berikut:

Contoh Soal 1 :

Tentukan hasil limit berikut!

1. $\lim\limits_{x\to 1} 5x^3$
2. $\lim\limits_{x\to -1} \frac{4-3x}{-2x}$
3. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{2x-3}{x-3}$
4. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{4-4x}{3x}$
5. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

Pembahasan:

1. $\lim\limits_{x\to 1} 5x^3$
   $= 5.(1)^3$
   $= 5.1$
   $= 5$ (bentuk tentu)

2. $\lim\limits_{x\to -1} \frac{4-3x}{-2x}$
   $= \dfrac{4-3(-1)}{-2(-1)}$
   $= \dfrac{4+3}{3}$
   $= \frac{7}{3}$ (bentuk tentu)

3. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{2x-3}{x-3}$
   $= \dfrac{2(3)-3}{3-3}$
   $= \dfrac{6-3}{0}$
   $= \dfrac{3}{0}$
   $= \infty$ (bentuk tentu)

   Khusus dalam limit, ketika hasil limitnya berbentuk $\frac{a}{0}$ maka nilainya sama dengan ∞, hal ini dikarenakan bentuk grafik fungsi $f(x) = \frac{a}{x}$ untuk x mendekati 0 nilainya mendekati ∞

4. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{4-4x}{3x}$
   $= \frac{4-4(1)}{3(1)} = \frac{4-4}{3}$
   $= \frac{0}{3} = 0$ (bentuk tentu)

5. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$
$= \dfrac{2^2-4}{2-2}$
$= \dfrac{4-4}{2-2}$
$= \frac{0}{0}$ (bentuk tak tentu)

Dengan substitusi hasilnya tidak ada bilangan yang memenuhi, sehingga harus diselesaikan dengan menggunakan metode lain.

Nah pada contoh nomor 5 ini merupakan contoh soal limit yang bisa diselesaikan dengan metode pemfaktoran.

- **Menyelesaikan Limit dengan cara Pemfaktoran**

Contoh Soal 1:

Anak-anak sekarang kita coba menyelesaikan soal nomor 5 di atas dengan cara memfaktorkan

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$$
$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}$$
$$= \lim_{x \to 2} x+2$$
$$= 2+2$$
$$= 4$$

Contoh Soal 2:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3+8}{x+2} = \ldots$$

Dengan substitusi langsung diperoleh:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3+8}{x+2} = \frac{(-2)^3+8}{-2+2} = \frac{0}{0} (tak\ tentu)$$

Dengan memfaktorkan :

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3+8}{x+2} = \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x+2)}$$
$$= \lim_{x \to -2} (x^2-2x+4)$$
$$= (-2)^2-(-2)+4$$
$$= 4+4+4$$
$$= 12$$

Penting untuk diingat….!

Beberapa bentuk *faktor istimewa* :

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Contoh Soal 3:

$$\lim_{x\to -1} \frac{2x^2-x-3}{3x^2+8x+5} = \cdots$$

Dengan substitusi langsung diperoleh:

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^2-x-3}{3x^2+8x+5} = \frac{2(-1)^2-(-1)-3}{3(1)^2-8(-1)+)5} = \frac{2+1-3}{3-8+5} = \frac{0}{0}\ (tak\ tentu)$$

Dengan memfaktorkan :

$$\lim_{x\to -1} \frac{2x^2+x-3}{3x^2+8x+5} = \lim_{x\to 1} \frac{(2x-3)(x+1)}{(3x+5)(x+1)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{2x-3}{3x+5}$$

$$= \frac{2(-1)-3}{3(-1)+5} = \frac{-5}{2}$$

Contoh Soal 4:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3-3x^2+6x}{x^2+2x} = \cdots$$

Dengan substitusi langsung diperoleh:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3-3x+6}{x^2+2x} = \lim_{x\to 0} \frac{(0^3-3.0+6.0)}{(0^2+2.0)} = \frac{0}{0}\ (tak\ tentu)$$

Dengan memfaktorkan diperoleh:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3-3x^2+6x}{x^2+2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x^2-3x+6)}{x(x+2)}$$

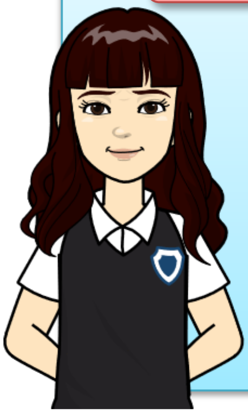
$$= \lim_{x\to 0} \frac{(x^2-3x+6)}{(x+2)} = \frac{(0^2-3.0+6)}{(0+2)} = \frac{6}{2} = 3$$

Inilah contoh soal limit yang diselesaikan dengan cara pemfaktoran, baiklah selanjutnya kita akan belajar cara menyelesaikan limit dengan cara mengalikan dengan akar sekawan.

- **Menyelesaikan Limit dengan cara Mengalikan dengan Akar Sekawan**

Anak-anak ada suatu kondisi dimana suatu limit tidak bisa diselesaikan dengan cara substitusi ataupun dengan cara pemfaktoran, yaitu salah satunya adalah limit fungsi yang berbentuk akar.

Contoh Soal 1:



$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$$

Nah penyelesaian bentuk limit akar ini jika diselesaikan dengan substitusi langsung hasilnya $\frac{0}{0}$ (tak tentu), dengan metode pemfaktoranpun sangat sulit diselesaikan, jadi solusinya penyelesaian limit bentuk akar ini adalah diselesaikan dengan merasionalkan/mengalikan dengan akar sekawan. Baiklah langsung kita jawab ya...

Sebelum kita membahas contoh soal di atas, kita ingat kembali bentuk-bentuk sekawan dari bentuk akar.

Ingat..!

Bentuk Sekawan dari :

$x - a$	bentuk kawan dari	$x + a$
$\sqrt{x} - a$	bentuk kawan dari	$\sqrt{x} + a$
$\sqrt{x} - \sqrt{a}$	bentuk kawan dari	$\sqrt{x} + \sqrt{a}$
$\sqrt{x+a} - b$	bentuk kawan dari	$\sqrt{x+a} + b$

Pembahasan:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}\right) \times 1$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}\right) \times \frac{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x}{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})} \times \frac{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}$$

Kalikan dengan akar sekawan dari $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x})^2 - (\sqrt{1-x})^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{(1+x) - (1-x)}$$

perubahan penyebut dari bentuk rumus $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{1+x-1+x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{2x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}{2}$$

Substitusi nilai x=0

$$= \frac{\sqrt{1}+\sqrt{1}}{2}$$

$$= \frac{1+1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Contoh Soal 2:

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}{3-x} = \cdots$$

Nah penyelesaian bentuk limit akar ini jika diselesaikan dengan substitusi langsung hasilnya $\frac{0}{0}$ (tak tentu). Jadi untuk menyelesaikan limit ini kita selesaikan dengan akar sekawan. Langsung saja kita bahas ya…

Pembahasan:

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}{3-x} = \lim_{x \to 3} \left(\frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}{3-x}\right) \times 1$$

$$= \lim_{x \to 3} \left(\frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}{3-x}\right) \times \frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x}}$$

Kalikan dengan akar sekawan

$$= \lim_{x \to 3} \frac{(3+x)-(2x)}{(3-x)\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{2x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{3-x}{(3-x)\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{2x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{1}{\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{2x}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3+3}+\sqrt{2.3}}$$

Substitusi nilai x=3

$$= \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{6}}$$

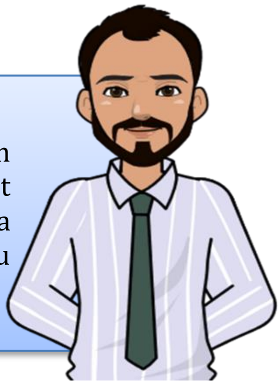
$$= \frac{1}{2\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$$

Rasionalkan penyebut, kalikan pembilang dan dengan $\sqrt{6}$

$$= \frac{1}{12}\sqrt{6}$$

Catatan:

Anak-anak ingat ya... tidak semua limit bentuk akar diselesaikan dengan mengalikan akar sekawan, sebelum menyelesaikan limit harus dicoba dulu dengan menggunakan substitusi, jika hasilnya bentuk tentu maka itulah hasilnya, tapi jika bentuknya tak tentu maka baru diselesaikan dengan cara lain.

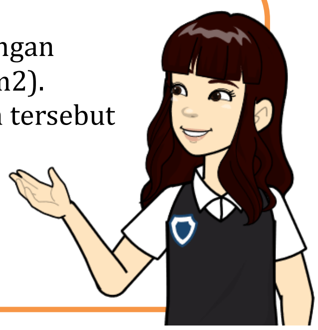


Aplikasi Limit Fungsi

Seperti yang sudah kita bahas sebelumnya, bahwa limit fungsi dapat diaplikasikan dalam kehidupan sehari-hari seperti beberapa contoh berikut. Untuk lebih memahami aplikasi limit fungsi tersebut perhatikan baik-baik contoh berikut.

Contoh Soal 1:

Sebuah lempengan logam yang dipanaskan akan memuai dengan pertambahan luas sebagai fungsi waktu f(t)=0,36t2 +0,6t (cm2). Kecepatan perubahan luas perubahan luas lempengan logam tersebut pada saat t menit dirumuskan dengan $v = \lim_{t \to t_1} \frac{f(t)-f(t_1)}{t-t_1}$.
Tentukan kecepatan perubahan luas lempengan logam pada saat t=5 menit



Pembahasan :

$$
\begin{aligned}
f(t) &= 0{,}36t^2 + 0{,}6t \\
f(5) &= 0{,}36(5)^2 + 0{,}6(5) \\
&= 0{,}36\,(25) + 3 \\
&= 9 + 3 \\
&= 12
\end{aligned}
$$

Kecepatan perubahan pertambangan luas lempengan logam pada saat t=5 menit

$$
\begin{aligned}
v &= \lim_{t \to t_1} \frac{f(t) - f(t_1)}{t - t_1} \\
&= \lim_{t \to 5} \frac{f(t) - f(5)}{t - 5} \\
&= \lim_{t \to 5} \frac{0{,}36t^2 + 0{,}6t - 12}{t - 5} \\
&= \lim_{t \to 5} \frac{0{,}6(0{,}6t^2 + t - 20)}{t - 5} \\
&= \lim_{t \to 5} \frac{0{,}6(0{,}6t + 4)(t - 5)}{t - 5} \\
&= \lim_{t \to 5} 0{,}6.\,(0{,}6t + 4) \\
&= 0{,}6.\,(0{,}6 \times 5 + 4) \\
&= 0{,}6(3 + 4) \\
&= 4{,}2
\end{aligned}
$$

Jadi kecepatan perubahan luas lempengan logam adalah 4,2 cm2/menit

Contoh Soal 2 :

Sebuah mobil yang bergerak dengan kelajuan setiap saat dirumuskan dengan $v(t) = 5t - \frac{1}{2}t^2$, v dalam m/detik dan t dalam detik.

a. Tentukan nilai pendekatan kelajuan untuk t mendekati 5 detik.
b. Tentukan percepatan (dalam m/detik) pada saat t mendekati 3 detik

$$\text{Percepatan} = \frac{\text{Perubahan kelajuan}}{\text{Perubahan waktu}} = \frac{\triangle v}{\triangle t}\ (\text{m/det}^2)$$

Pembahasan:

a. Nilai pendekatan v(t) untuk t mendekati 5 detik

$$\lim_{t\to 5} v(t) = \lim_{t\to 5}\left(5t - \frac{1}{2}t^2\right)$$
$$= 5 \times 5 - \frac{1}{2} \times 5^2$$
$$= 25 - 12{,}5$$
$$= 12{,}5$$

b. Percepatan=$\frac{Perubahan\ kelajuan}{Perubahan\ waktu}$

Untuk waktu mendekati 3 detik

$$\lim_{t\to 3}\frac{\triangle v}{\triangle t} = \lim_{t\to 3}\frac{v(t) - v(3)}{t-3}$$
$$= \lim_{t\to 3}\frac{5t - \frac{1}{2}t^2 - 10{,}5}{t-3}$$
$$= \lim_{t\to 3}\frac{\frac{1}{2}(10t - t^2 - 21)}{t-3}$$
$$= \lim_{t\to 3}\frac{\frac{1}{2}(-t^2 + 10t - 21)}{t-3}$$

$$= \lim_{t\to 3}\frac{\frac{1}{2}(-t^2 + 7)(t-3)}{t-3}$$
$$= \lim_{t\to 3}\frac{1}{2}(-t+7)$$
$$= \frac{1}{2}(-3+7)$$
$$= 2$$