KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
TRANSLASI (PERGESERAN)

A. Tujuan Pembelajaran

Anak-anak setelah kegiatan pembelajaran 1 ini kalian diharapkan dapat :
1. Memahami pengertian translasi
2. Menentukan translasi pada titik
3. Menentukan translasi pada kurva

B. Uraian Materi

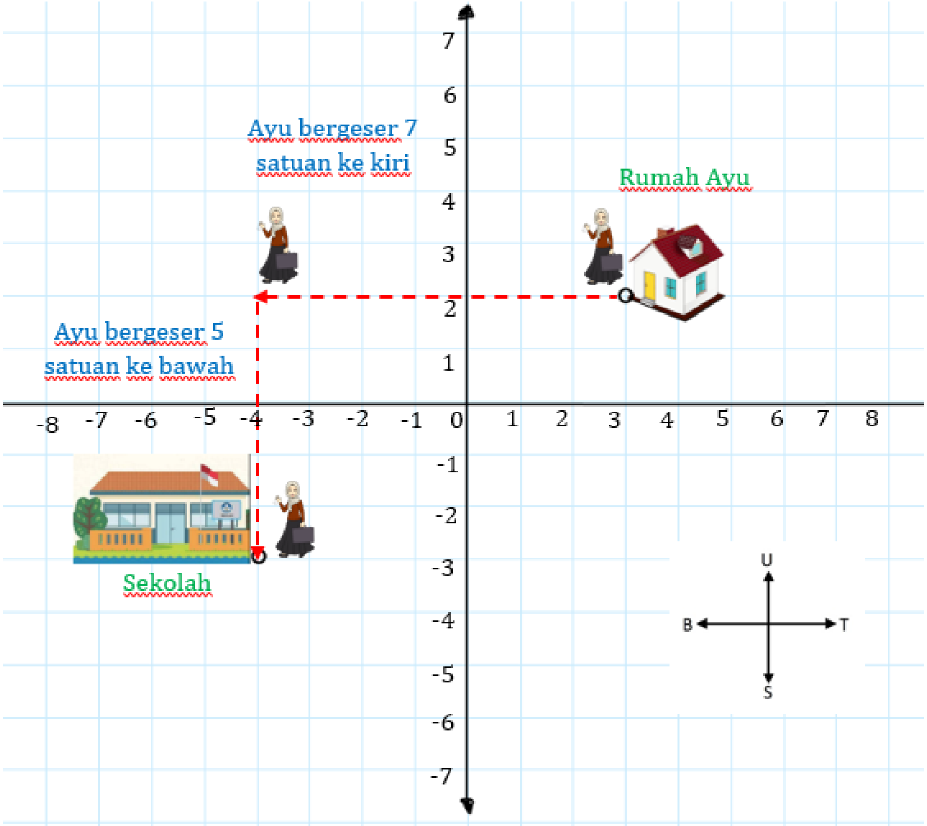
Pengertian Translasi
Anak-anak, pernahkan kalian mengamati objek atau benda-benda yang bergerak di sekitar kalian ? seperti kendaraaan yang berjalan di jalan raya, pesawat yang melintas di udara, eskalator yang bergerak atau diri kita sendiri yang bergerak kemana saja. Kegiatan tersebut menyebabkan benda atau objek mengalami perubahan posisi tanpa mengubah bentuk dan ukuran. Yuk kita memahami konsep translasi dengan menyelesaikan Masalah 1.1 dan Masalah 1.2

Masalah 1.1

Ayu ingin berangkat ke sekolah. Jika Ayu berangkat dari rumah maka untuk sampai ke sekolah ayu harus berjalan 7 satuan ke arah barat dan berjalan 5 satuan ke arah selatan. Coba kamu sketsa pergerakan Ayu pada bidang cartesius. Dapatkah kamu menemukan proses pergerakan Ayu dari rumah menuju sekolah?

Anak-anakku, untuk mempermudah memahami konsep translasi kita bisa menggunakan pendekatan bidang Cartesius. Kita dapat mengasumsikan untuk pergeseran ke **kanan** pada bidang cartesius merupakan sumbu **X positif**, pergeseran ke **kiri** merupakan sumbu **X negatif**, pergeseran ke **atas** merupakan sumbu **Y positif** dan pergeseran ke **bawah** merupakan sumbu **Y negatif**.

Jika Masalah 1.1 kita sajikan dalam bidang Cartesius maka diperoleh gambar 2. Yuk kita perhatikan gambar 2 !



Gambar 2. Pergerakan Ayu dari Rumah ke Sekolah pada bidang Cartesius
Sumber : Koleksi Pribadi

Jika kita melihat posisi rumah Ayu pada bidang Cartesius berada pada koordinat (3,2). Untuk menuju ke sekolah Ayu harus berjalan ke arah barat 7 satuan artinya posisi Ayu bergeser 7 satuan ke kiri dari posisi rumah pada bidang Cartesius. Selanjutnya Ayu harus berjalan lagi ke arah selatan 5 satuan artinya posisi Ayu bergeser 5 satuan ke bawah. Jika kita melihat pada bidang Cartesius pada saat tiba di sekolah posisi Ayu berada pada koordinat$(-4,-3)$. Hal ini berarti

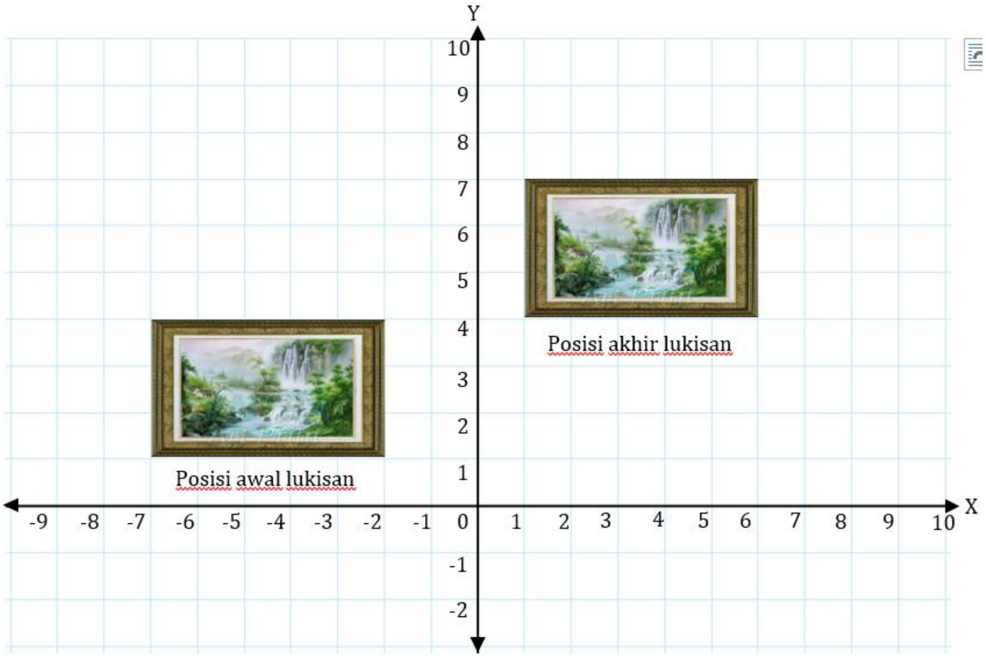
$$\binom{3}{2}+\binom{-7}{-5}=\binom{-4}{-3}$$

Jadi, posisi Ayu di sekolah terletak pada koordinat $(-4,-3)$

Masalah 1.2

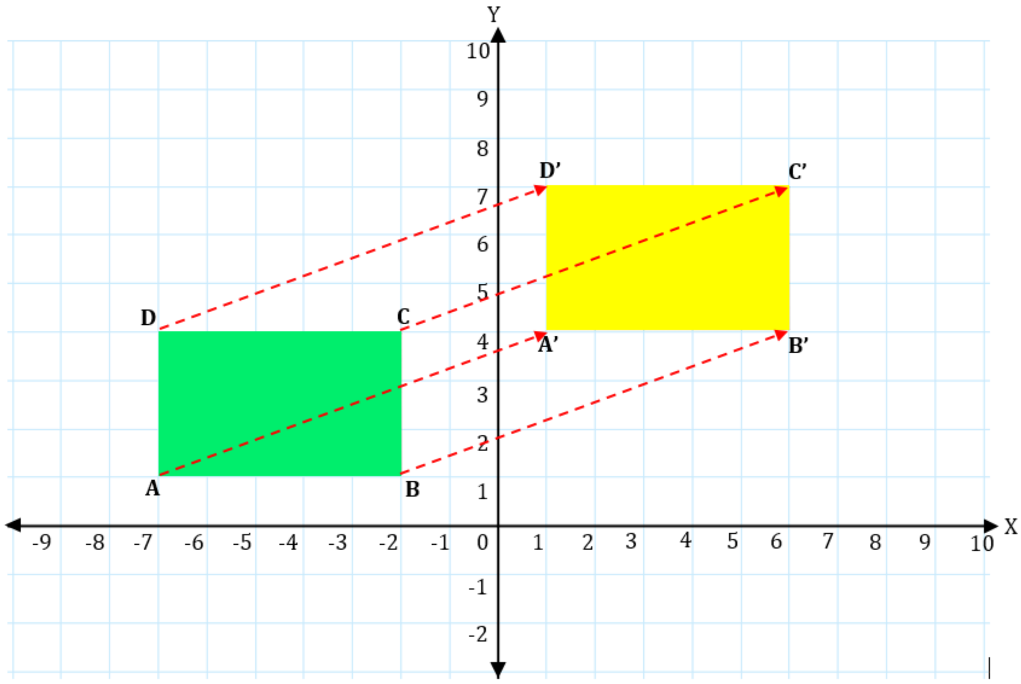
Bimo akan memindahkan lukisan pada dinding dengan menggeser ke kanan sejauh 4 satuan dan ke atas sejauh 3 satuan. Coba kamu sketsa pergerakan lukisan pada bidang Cartesius. Dapatkah kamu menemukan proses pergerakan lukisan dari posisi awal ke posisi akhir?

Anak-anak, jika perpindahan lukisan diilustrasikan dalam bidang Cartesius maka akan terlihat seperti gambar di bawah ini. Yuk kita perhatikan gambar 3.



Gambar 3. Perpindahan lukisan pada bidang Cartesius
Sumber : Koleksi Pribadi

Anak-anakku, untuk mempermudah kita memahami perpindahan lukisan yang terjadi, kita bisa memisalkan lukisan tersebut sebagai persegi panjang ABCD dan hasil perpindahan lukisan kita misalkan sebagai persegi panjang A'B'C'D'. Agar mudah memahami yuk kita perhatikan gambar 4.



Gambar 4. Contoh translasi bidang
Sumber : Koleksi Pribadi

Anak-anakku, jika kita perhatikan persegi panjang A'B'C'D' merupakan bayangan dari persegi panjang ABCD setelah ditranslasi. Dari hasil translasi tersebut diperoleh $AA' = BB' = CC' = DD'$

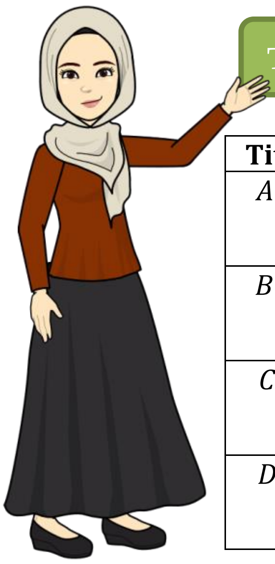
Pergeseran 1 :
Posisi awal titik A adalah $A(-7, 1)$, kemudian bergerak ke kanan sejauh 8 satuan dan ke atas sejauh 3 satuan sehingga posisi berubah di koordinat $A'(1, 4)$
Hal ini berarti :
$$\begin{pmatrix}-7\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$$

Pergeseran 2 :
Posisi awal titik B adalah $B(-2, 1)$, kemudian bergerak ke kanan sejauh 8 satuan dan ke atas sejauh 3 satuan sehingga posisi berubah di koordinat $B'(6, 4)$
Hal ini berarti :
$$\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$$

Pergeseran 3 :
Posisi awal titik C adalah $C(-2, 4)$, kemudian bergerak ke kanan sejauh 8 satuan dan ke atas sejauh 3 satuan sehingga posisi berubah di koordinat $C'(6, 7)$
Hal ini berarti :
$$\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\7\end{pmatrix}$$

Pergeseran 4 :
Posisi awal titik D adalah $D(-2, 4)$, kemudian bergerak ke kanan sejauh 8 satuan dan ke atas sejauh 3 satuan sehingga posisi berubah di koordinat $D'(1, 7)$
Hal ini berarti :
$$\begin{pmatrix}-7\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}$$

Pergeseran setiap titik pada uraian di atas dapat disajikan secara lebih sederhana dalam Tabel 1.



Tabel 1.Translasi titik

Titik awal	Titik Akhir	Proses	Translasi
$A\,(-7, 1)$	$A'(1, 4)$	$\begin{pmatrix}-7\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$	$T=\begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}$
$B(\,-2, 1)$	$B'(6, 4)$	$\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$	$T=\begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}$
$C(-2, 4)$	$C'(6, 7)$	$\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\7\end{pmatrix}$	$T=\begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}$
$D(-7, 4)$	$D'(1, 7)$	$\begin{pmatrix}-7\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}$	$T=\begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix}$

Berdasarkan pengamatan pada Tabel 1, secara umum diperoleh konsep :

Translasi (pergeseran) adalah transformasi yang memindahkan titik-titik pada bidang dengan arah dan jarak tertentu.

Titik $A(x, y)$ ditranslasikan oleh $T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ menghasilkan bayangan $A'(x', y')$ ditulis dengan

$$A(x, y) \xrightarrow{T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} A'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Catatan : Titik A' disebut bayangan titik A oleh translasi $T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Anak-anak, untuk lebih memahami konsep translasi, mari kita simak contoh soal 1 dan contoh soal 2

Contoh Soal 1:

Jika titik $A(2, 3)$ ditranslasikan oleh $T(-3, 4)$ maka bayangan titik A adalah ...

Pembahasan :

Pada soal diketahui koordinat titik $A(2, 3)$ artinya $x = 2$ dan $y = 3$ akan ditranslasikan oleh $T\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ artinya $a = -3$ dan $b = 4$ sehingga dapat dituliskan

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Substitusi nilai x, y, a dan b

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + (-3) \\ 3 + 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Lakukan proses penjumlahan pada matriks dengan menjumlahkan elemen-elemen matriks yang seletak

Contoh Soal 2:

Tentukan persamaan bayangan garis $3x + 5y - 7 = 0$ oleh $T\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$!

Pembahasan :

Pada soal diketahui persamaan garis $3x + 5y - 7 = 0$ akan ditranslasikan oleh $T\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ artinya $a = 2$ dan $b = -1$

Misal titik $A(x, y)$ memenuhi persamaan $3x + 5y - 7 = 0$ sehingga

$$A(x, y) \xrightarrow{T\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}} A'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+2\\y-1\end{pmatrix}$$

Substitusi nilai$a$ dan b

Lakukan proses penjumlahan pada matriks dengan menjumlahkan elemen-elemen matriks yang seletak

Berdasarkan kesamaan dua matriks diperoleh
$x' = x + 2 \rightarrow x = x' - 2$
$y' = y - 1 \rightarrow y = y' + 1$
Substitusi $x = x' - 2$ dan $y = y' + 1$ ke persamaan garis $3x + 5y - 7 = 0$
$3(x' - 2) + 5(y' + 1) - 7 = 0$
$3x' - 6 + 5y' + 5 - 7 = 0$
$3x' + 5y' - 8 = 0$
Jadi persamaan bayangan garis adalah $3x + 5y - 8 = 0$

C. Rangkuman

1. **Translasi (pergeseran)** adalah transformasi yang memindahkan titik-titik pada bidang dengan arah dan jarak tertentu.
2. Titik $A(x, y)$ ditranslasikan oleh $T\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ menghasilkan bayangan $A'(x', y')$ ditulis dengan
$$A(x, y) \xrightarrow{T\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}} A'(x', y')$$
3. Bentuk persamaan matriks translasi : $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$
4. $T\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ disebut komponen translasi, a merupakan pergeseran secara horizontal dan b merupakan pergeseran secara vertikal.
5. Titik A' disebut bayangan titik A yang telah ditranformasi.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2
REFLEKSI (PENCERMINAN)

A. Tujuan Pembelajaran

Anak-anak setelah kegiatan pembelajaran 2 ini kalian diharapkan dapat

1. Memahami pengertian refleksi (pencerminan)
2. Memahami sifat-sifat refleksi
3. Menentukan refleksi terhadap sumbu X
4. Menentukan refleksi terhadap sumbu Y
5. Menentukan refleksi terhadap titik O(0, 0)
6. Menentukan refleksi terhadap garis $y = x$
7. Menentukan refleksi terhadap garis $y = -x$
8. Menentukan refleksi terhadap garis $x = h$
9. Menentukan refleksi terhadap garis $y = k$

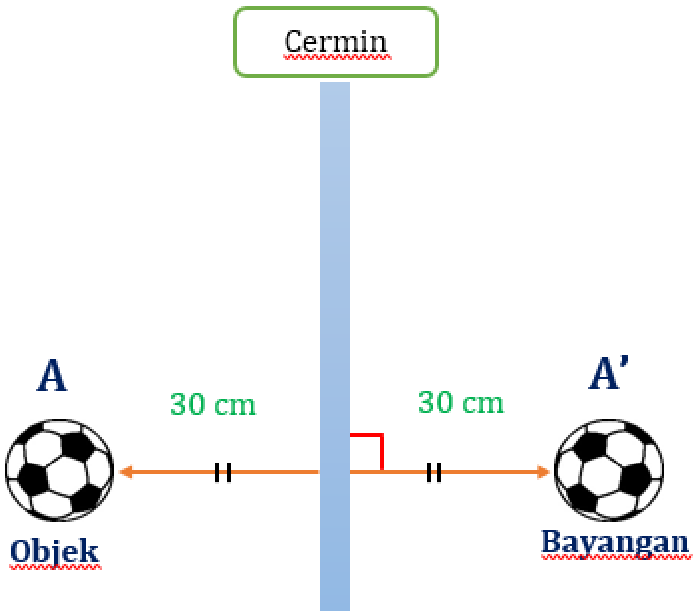
B. Uraian Materi

Pengertian dan Sifat-sifat Refleksi (Pencerminan)

Bercermin merupakan kegiatan yang sering kita lakukan dalam kehidupan sehari-hari. Tetapi pernahkan kita berpikir bagaimana bentuk bayangan yang dihasilkan pada cermin? Bagaimana jarak bayangan yang dihasilkan terhadap cermin? untuk menjawab pertanyaan tersebut, yuk kita simak ilustrasi 1 dan ilustrasi 2

Ilustrasi 1

Terdapat sebuah bola yang diletakkan dihadapan cermin dengan jarak 30 cm. Bagaimana hasil refleksi bola terhadap cermin? Bagaimana jarak bayangan bola terhadap cermin ?

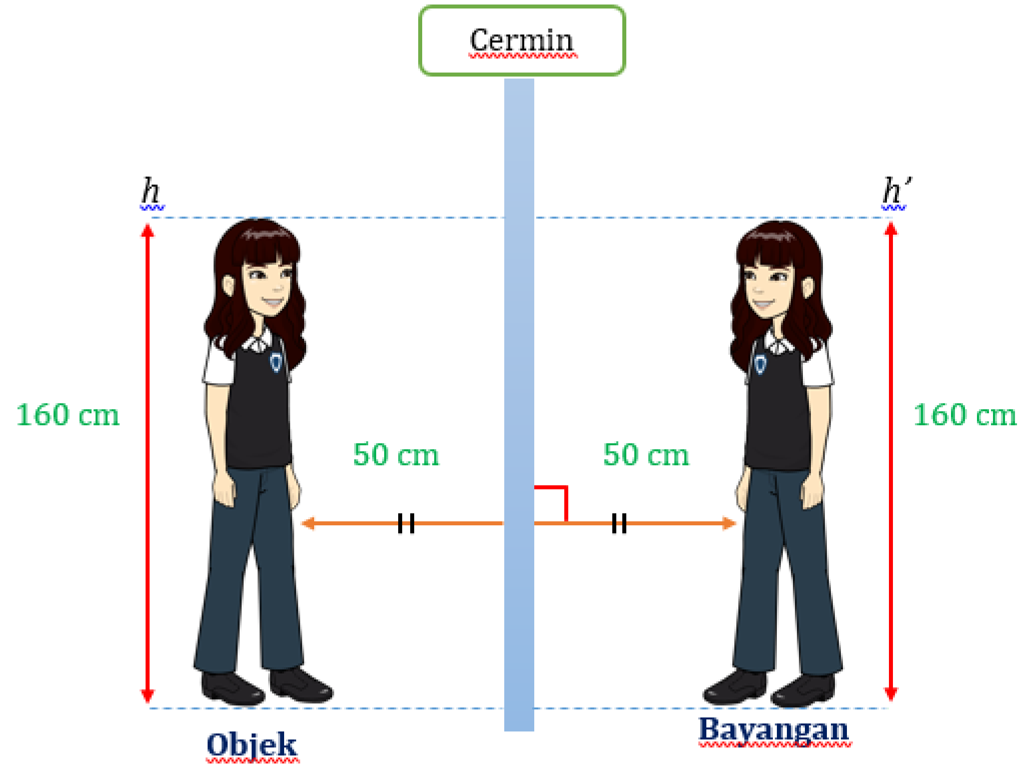


Gambar 5. Bola dihadapan cermin dengan jarak 30 cm
Sumber : Koleksi Pribadi

Seperti telihat pada Gambar 5 hasil bayangan bola terhadap cermin berupa bola. Jika kita misalkan bola sebagai titik A dan bayangan bola sebagai A', maka jarak titik A ke cermin sama dengan jarak titik A' ke cermin yaitu 30 cm. Selain itu, jika titik A dan titik A' kita hubungkan maka garis AA' akan tegak lurus dengan cermin dan menghasilkan titik yang sama dengan jarak yang sama.

Ilustrasi 2

Rani berdiri di depan cermin dengan jarak 50 cm dan tinggi Rani adalah 160 cm. Bagaimana hasil refleksi Rani terhadap cermin? Bagaimana jarak bayangan Rani terhadap cermin ?



Gambar 6. Rani berdiri dihadapan cermin
Sumber : Koleksi Pribadi

Anak-anakku, jika kita lihat pada cermin hasil bayangan Rani berupa sosok Rani dengan tinggi yang sama dan jarak bayangan Rani terhadap cermin sama dengan jarak Rani terhadap cermin yaitu 50 cm. Jika kita misalkan tinggi Rani sebagai garis h maka hasil refleksi berupa garis h'. Jika ujung-ujung garis h dan garis h' dihubungkan maka akan menghasilkan garis yang sejajar.

Berdasarkan ilustrasi 1 dan ilustrasi 2, kita dapat memahami konsep refleksi secara umum dan sifat-sifatnya.

Refleksi (pencerminan) adalah suatu transformasi yang memindahkan tiap titik pada bidang dengan menggunakan sifat bayangan oleh suatu cermin. Refleksi disimbolkan dengan M_a dengan a merupakan sumbu cermin.

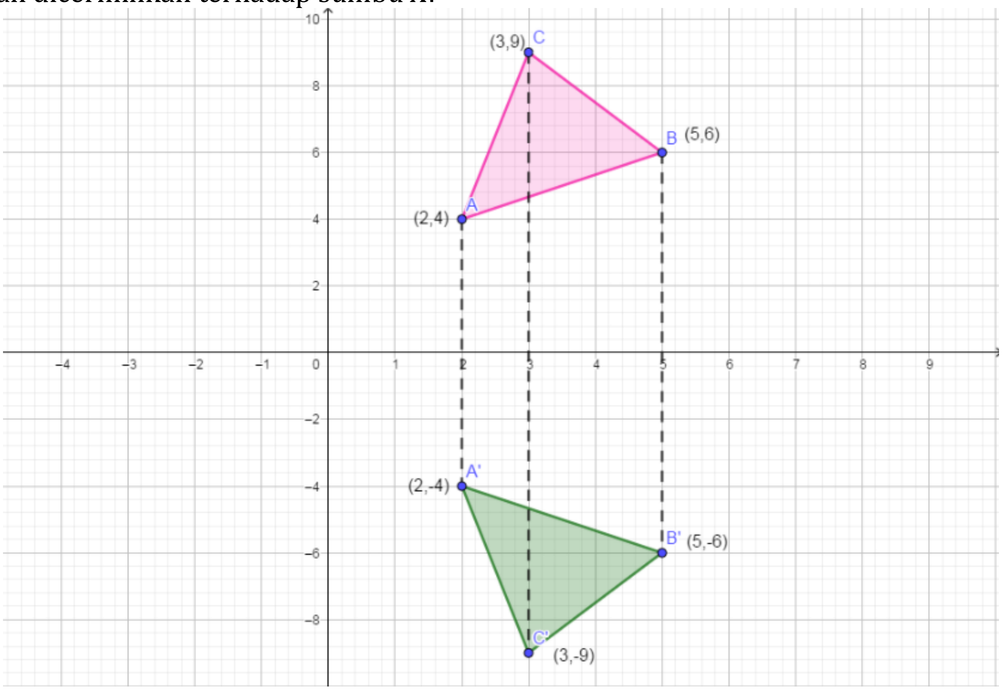
Sifat-sifat Refleksi:

1. Jarak dari titik asal ke cermin sama dengan jarak cermin ke titik bayangan
2. Garis yang menghubungkan titik asal dengan titik bayangan tegak lurus terhadap cermin
3. Garis-garis yang terbentuk antara titik-titik asal dengan titik-titik bayangan akan saling sejajar

Jenis-Jenis Refleksi

1. Refleksi terhadap sumbu x

Anak-anakku, kita akan menemukan konsep pencerminan terhadap sumbu x dengan mengamati pencerminan segitiga ABC pada gambar 7. Bagaimana bayangan segitiga ABC setelah dicerminkan terhadap sumbu X?



Gambar 7. Segitiga ABC direfleksikan terhadap sumbu x
Sumber : http://panduangeogebra.blogspot.com/

Pada gambar 7, kita dapat melihat bahwa segitiga A'B'C' merupakan hasil bayangan segitiga ABC setelah dicermikan terhadap sumbu x pada koordinat cartesius. Agar mudah memahami perubahan koordinat setiap titik pada segitiga, kita dapat melihat pada tabel 2 berikut.

Tabel 2. Koordinat pencerminan titik pada segitiga terhadap sumbu x

Titik	Koordinat Bayangan
A (2, 4)	A'(2, -4)
B (5, 6)	B'(5, -6)
C (3, 9)	C'(3, -9)

Berdasarkan pengamatan pada gambar 7 dan tabel 2, secara umum diperoleh

Jika titik $A(x, y)$ dicerminkan terhadap sumbu x, maka akan menghasilkan bayangan $A'(x, -y)$

Anak-anakku, mari kita mencari matriks pencerminan terhadap sumbu x

Kita misalkan matriks transformasinya adalah $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sehingga

$$A(x, y) \xrightarrow{M_x} A'(x, -y)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

Dengan kesamaan dua matriks diperoleh:

$x = ax + by$ agar ruas kiri dan kanan bernilai sama maka $a = 1$ dan $b = 0$

Cek :

Substitusi $a = 1$ dan $b = 0$ ke persamaan $x = ax + by$

$$x = 1 \cdot x + 0 \cdot y$$

$$x = x$$

$-y = cx + dy$ agar rus kiri dan kanan bernilai sama maka $c = 0$ dan $d = -1$

Cek :

Substitusi $c = 0$ dan $d = -1$ ke persamaan $-y = cx + dy$

$$-y = 0 \cdot x + (-1) \cdot y$$

$$-y = -y$$

Berdasarkan uraian di atas diperoleh matriks pencerminan terhadap sumbu x adalah $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Titik $A(x, y)$ dicerminkan terhadap sumbu x menghasilkan bayangan $A'(x', y')$ ditulis dengan

$$A(x, y) \xrightarrow{M_x} A'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Anak-anakku, untuk lebih memahami konsep pencerminan terhadap sumbu x perhatikan beberapa contoh soal berikut

Contoh Soal 1:

Jika titik $B(2,5)$ dicerminkan terhadap sumbu x maka bayangan titik B adalah ...

Pembahasan:

$$B(2,5) \xrightarrow{M_x} B'(x',y')$$

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow$ Lakukan perkalian matriks

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

Jadi bayangan titik B adalah $B'(2,-5)$

Contoh Soal 2

Jika garis l: $3x - 2y - 5 = 0$ dicerminkan terhadap sumbu x maka hasil bayangan garis l adalah ...

Pembahasan;

Misal titik $A(x,y)$ memenuhi persamaan $3x - 2y - 5 = 0$ sehingga

$$A(x,y) \xrightarrow{M_x} A'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

Berdasarkan kesamaan dua matriks diperoleh

$x' = x \rightarrow x = x'$

$y' = -y \rightarrow y = -y'$

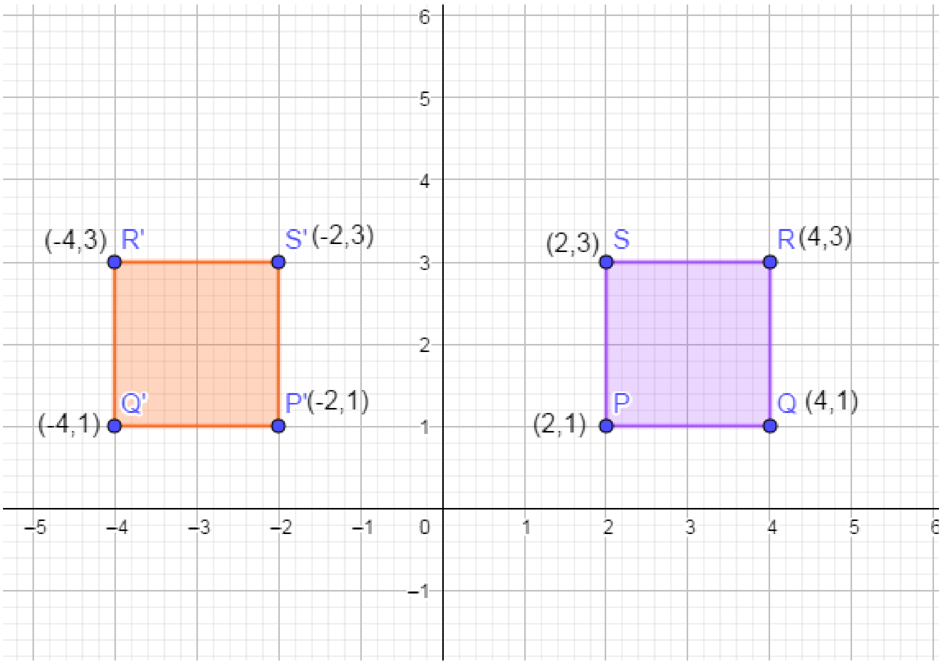
Substitusi $x = x'$ dan $y = -y'$ ke persamaan garis l

$$3x - 2y - 5 = 0$$
$$3(x') - 2(-y') - 5 = 0$$
$$3x' + 2y' - 5 = 0$$

Jadi, persamaan bayangan garis l adalah $3x + 2y - 5 = 0$

2. Refleksi terhadap sumbu y

Anak-anakku, untuk memahami konsep refleksi terhadap sumbu y mari kita amati pencerminan persegi PQRS. Bagaimana perubahan setiap titik P, Q, R, dan S pada persegi PQRS setelah dicerminkan terhadap sumbu y?



Gambar 8. Persegi PQRS direfleksikan terhadap sumbu y
Sumber : http://panduangeogebra.blogspot.com/

Pada gambar di atas, kita dapat melihat bahwa persegi P'Q'R'S' merupakan hasil bayangan persegi PQRS setelah dicermikan terhadap sumbu y pada koordinat cartesius. Agar mudah memahami perubahan koordinat setiap titik pada persegi dapat dilihat pada tabel 3 berikut.

Tabel 3. Koordinat pencerminan titik pada persegi terhadap sumbu y

Titik	Koordinat Bayangan
P (2, 1)	P'(-2, 1)
Q (4, 1)	Q'(-4, 1)
R (4, 3)	C'(-4, 3)
S (2, 3)	S'(-2, 3)

Berdasarkan pengamatan pada gambar 8 dan tabel 3, secara umum diperoleh

Jika titik $A(x, y)$ dicerminkan terhadap sumbu y, maka akan menghasilkan bayangan $A'(-x, y)$

Anak-anakku, mari kita mencari matriks pencerminan terhadap sumbu y
Kita misalkan matriks transformasinya adalah $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sehingga diperoleh

$$A(x, y) \xrightarrow{M_y} A'(-x, y)$$
$$\begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

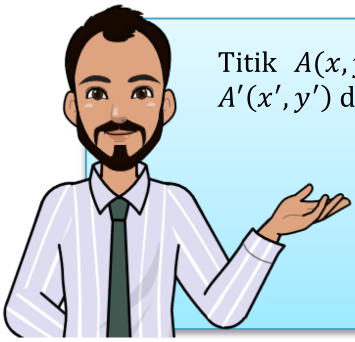
Dengan kesamaan dua matriks diperoleh:
$-x = ax + by$ agar ruas kiri dan kanan bernilai sama maka $a = -1$ dan $b = 0$
Cek :
Substitusi $a = -1$ dan $b = 0$ ke persamaan $-x = ax + by$

$$-x = (-1) \cdot x + 0 \cdot y$$
$$-x = -x$$

$y = cx + dy$ agar rus kiri dan kanan bernilai sama maka $c = 0$ dan $d = 1$
Cek :
Substitusi $c = 0$ dan $d = 1$ ke persamaan $y = cx + dy$

$$y = 0 \cdot x + 1 \cdot y$$
$$y = y$$

Berdasarkan uraian di atas diperoleh matriks pencerminan terhadap sumbu y adalah $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$



Titik $A(x, y)$ dicerminkan terhadap sumbu y menghasilkan bayangan $A'(x', y')$ ditulis dengan

$$A(x, y) \xrightarrow{M_y} A'(x', y')$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Anak-anakku, untuk lebih memahami konsep refleksi terhadap sumbu y perhatikan beberapa contoh soal berikut

Contoh Soal 1:

Jika titik $A(-4, -3)$ dicerminkan terhadap sumbu y maka bayangan titik A adalah ...

Pembahasan:

$$A(-4, -3) \xrightarrow{M_y} A'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{\text{Lakukan perkalian matriks}}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan titik A adalah $A'(4, -3)$

Contoh Soal 2:

Jika garis $l: 3x - 2y - 5 = 0$ dicerminkan terhadap sumbu y maka hasil bayangan garis l adalah ...

Pembahasan;
Misal titik $A(x, y)$ memenuhi persamaan $3x - 2y - 5 = 0$ sehingga

$$A(x, y) \xrightarrow{M_y} A'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

Berdasarkan kesamaan dua matriks diperoleh

$x' = -x \rightarrow x = -x'$

$y' = y \rightarrow y = y'$

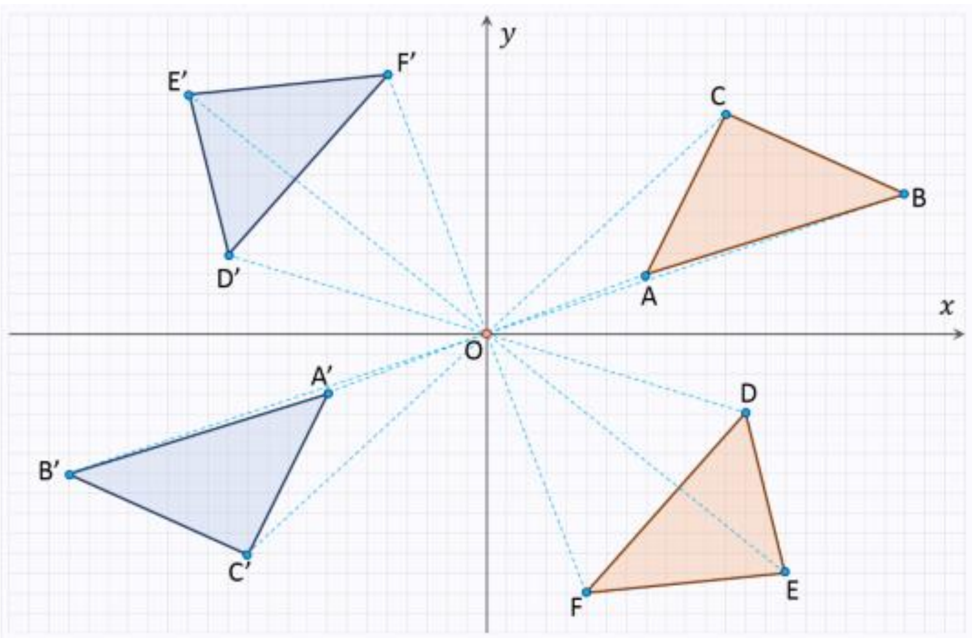
Substitusi $x = -x'$ dan $y = y'$ ke persamaan garis l

$$3x - 2y - 5 = 0$$
$$3(-x') - 2(y') - 5 = 0$$
$$-3x' - 2y' - 5 = 0$$
$$3x + 2y + 5 = 0$$

Jadi, persamaan bayangan garis l adalah $3x + 2y + 5 = 0$

3. Refleksi terhadap titik asal O(0, 0)

Anak-anakku, untuk memahami konsep refleksi terhadap titik asal O(0, 0) mari kita amati pencerminan segitiga ABC dan segitiga DEF. Bagaimana perubahan setiap titik A, B, C pada segitiga ABC dan titik D, E, F pada segitiga DEF setelah dicerminkan terhadap titik asal yaitu titik O(0, 0)?



Gambar 9. Segitiga ABC dan segitiga PQRS direfleksikan terhadap titik asal O(0, 0)
Sumber : e-modul Matematika kelas XI

Pada gambar 9, kita dapat melihat bahwa segitiga A'B'C' merupakan bayangan dari segitiga ABC setelah dicerminkan terhadap titik asal O(0,0). Segitiga D'E'F' merupakan hasil bayangan segitiga DEF setelah dicerminkan terhadap titik asal O(0,0). Anak-anak untuk mudah memahami perubahan koordinat setiap titik yang terjadi pada segitiga ABC dan segitiga DEF dapat dilihat pada tabel 4.

Tabel 4. Koordinat pencerminan titik
pada segitiga terhadap titik asal O(0, 0)

Titik	**Koordinat Bayangan**
A (8, 3)	A'(-8, -3)
B (14, 7)	B'(-14, -7)
C (12,11)	C'(-12, -11)
D (13, -4)	D'(-13, 4)
E (15, -12)	E'(-15, 12)
F (5, -13)	F' (-5, 13)

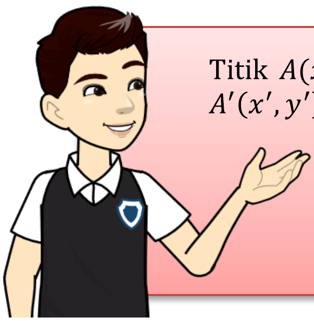
Berdasarkan pengamatan pada gambar 9 dan tabel 4, secara umum diperoleh

Jika titik $A(x, y)$ dicerminkan terhadap titik asal O(0, 0), maka akan menghasilkan bayangan $A'(-x, -y)$

Anak-anakku, mari kita mencari matriks pencerminan terhadap titik asal O(0, 0)
Kita misalkan matriks transformasinya adalah $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sehingga diperoleh

$$A(x, y) \xrightarrow{M_{O(0,0)}} A'(-x, y)$$
$$\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

Dengan kesamaan dua matriks diperoleh:
$-x = ax + by$ agar ruas kiri dan kanan bernilai sama maka $a = -1$ dan $b = 0$
Cek :
Substitusi $a = -1$ dan $b = 0$ ke persamaan $-x = ax + by$
$$-x = (-1) \cdot x + 0 \cdot y$$
$$-x = -x$$
$-y = cx + dy$ agar rus kiri dan kanan bernilai sama maka $c = 0$ dan $d = -1$
Cek :
Substitusi $c = 0$ dan $d = 1$ ke persamaan $y = cx + dy$
$$-y = 0 \cdot x + (-1) \cdot y$$
$$-y = -y$$
Berdasarkan uraian di atas diperoleh matriks pencerminan terhadap titik asal O(0, 0) adalah $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$



Titik $A(x, y)$ dicerminkan terhadap titik asal O(0,0) menghasilkan bayangan $A'(x', y')$ ditulis dengan

$$A(x, y) \xrightarrow{M_{O(0,0)}} A'(x', y')$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Anak-anakku, untuk lebih memahami konsep refleksi terhadap titik asal O(0,0) perhatikan beberapa contoh soal berikut

Contoh Soal 1:

Jika titik $A(-4, -3)$ dicerminkan terhadap titik asal O(0, 0) maka bayangan titik A adalah ...

Pembahasan:

$$A(-4,-3) \xrightarrow{M_{O(0,0)}} A'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan titik A adalah $A'(4, 3)$

Contoh Soal 2:

Jika garis $l: 3x - 2y - 5 = 0$ dicerminkan terhadap titik asal O(0, 0) maka hasil bayangan garis l adalah ...

Pembahasan:

Misal titik $A(x, y)$ memenuhi persamaan $3x - 2y - 5 = 0$ sehingga

$$A(x,y) \xrightarrow{M_{O(0,0)}} A'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

Berdasarkan kesamaan dua matriks diperoleh

$$x' = -x \rightarrow x = -x'$$
$$y' = -y \rightarrow y = -y'$$

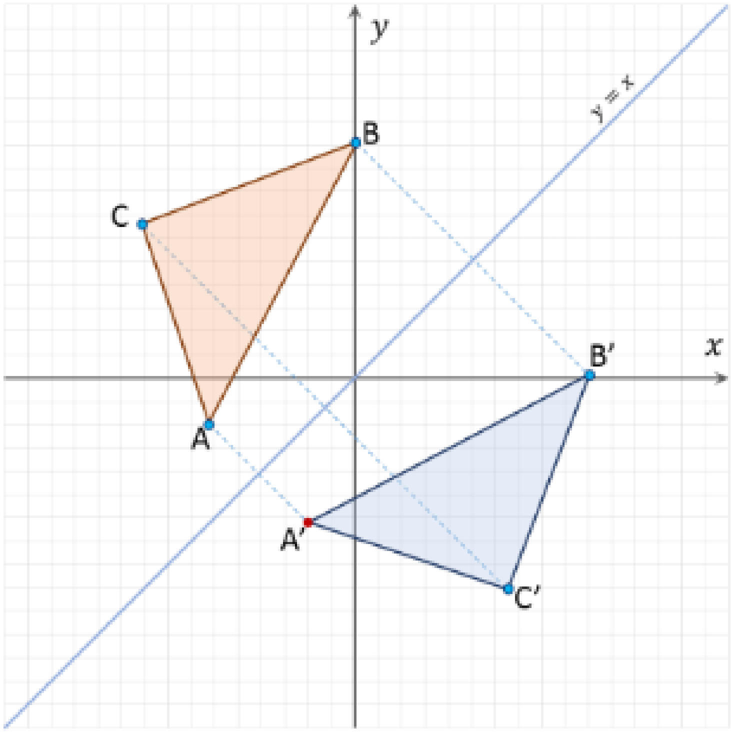
Substitusi $x = -x'$ dan $y = -y'$ ke persamaan garis l

$$3x - 2y - 5 = 0$$
$$3(-x') - 2(-y') - 5 = 0$$
$$-3x' + 2y' - 5 = 0$$

Jadi persamaan bayangan garis l adalah $-3x' + 2y' - 5 = 0$

4. Refleksi terhadap garis $y = x$

Anak-anakku, untuk memahami konsep refleksi terhadap garis $y = x$ mari kita amati pencerminan segitiga ABC. Bagaimana perubahan setiap titik A, B, C pada segitiga ABC setelah dicerminkan terhadap garis $y = x$?



Gambar 10. Segitiga ABC direfleksikan terhadap garis $y = x$
Sumber : e-modul Matematika kelas XI

Pada gambar 10, kita dapat melihat bahwa segitiga A'B'C' merupakan bayangan dari segitiga ABC setelah dicerminkan terhadap garis $y = x$. Anak-anak, untuk mudah memahami peurbahan koordinat setiap titik A, B dan C yang terjadi pada segitiga ABC dapat dilihat pada tabel 5.

Tabel 5. Koordinat pencerminan titik pada segitiga terhadap garis $y = x$

Titik	Koordinat Bayangan
A (-6, -2)	A'(-2, -6)
B (0, 10)	B'(10, 0)
C (-9,7)	C'(7, -9)

Berdasarkan pengamatan pada gambar 10 dan tabel 5, secara umum diperoleh

Jika titik $A(x, y)$ dicerminkan terhadap garis $y = x$, maka akan menghasilkan bayangan $A'(y, x)$

Anak-anakku, mari kita mencari matriks pencerminan terhadap garis $y = x$
Kita misalkan matriks transformasinya adalah $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sehingga diperoleh

$$A(x, y) \overset{M_{y=x}}{\rightarrow} A'(y, x)$$
$$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

Dengan kesamaan dua matriks diperoleh:

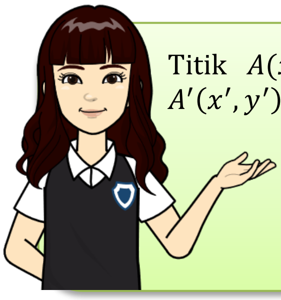
$y = ax + by$ agar ruas kiri dan kanan bernilai sama maka $a = 0$ dan $b = 1$
Cek :
Substitusi $a = 0$ dan $b = 1$ ke persamaan $y = ax + by$

$$y = 0 \cdot x + 1 \cdot y$$
$$y = y$$

$x = cx + dy$ agar rus kiri dan kanan bernilai sama maka $c = 1$ dan $d = 0$
Cek :
Substitusi $c = 1$ dan $d = 0$ ke persamaan $x = cx + dy$

$$x = 1 \cdot x + 0 \cdot y$$
$$x = x$$

Berdasarkan uraian di atas diperoleh matriks pencerminan terhadap garis $y = x$ adalah $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$



Titik $A(x, y)$ dicerminkan terhadap garis $y = x$ menghasilkan bayangan $A'(x', y')$ ditulis dengan

$$A(x, y) \xrightarrow{M_{y=x}} A'(x', y')$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Anak-anakku, untuk lebih memahami konsep refleksi terhadap garis $y = -x$ perhatikan beberapa contoh soal berikut

Contoh Soal 1:

Jika titik $P(-5, 4)$ dicerminkan terhadap garis $y = x$ maka bayangan titik P adalah ...

Pembahasan:

$$P(-5, 4) \xrightarrow{M_{y=x}} P'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan titik P adalah $P'(4, -5)$

Contoh Soal 2:

Jika garis $l: 3x - 2y - 5 = 0$ dicerminkan terhadap garis $y = x$maka hasil bayangan garis l adalah ...

Pembahasan:
Misal titik $A(x, y)$ memenuhi persamaan $3x - 2y - 5 = 0$ sehingga

$$A(x, y) \xrightarrow{M_{y=x}} A'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

Berdasarkan kesamaan dua matriks diperoleh

$$x' = y \rightarrow y = x'$$
$$y' = x \rightarrow x = y'$$

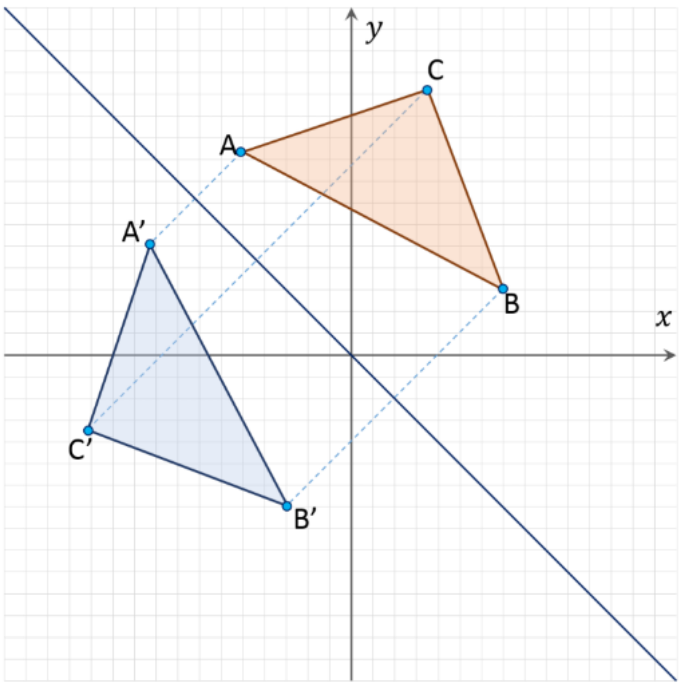
Substitusi $x = y'$ dan$y = x'$ ke persamaan garis l

$$3x - 2y - 5 = 0$$
$$3(y') - 2(x') - 5 = 0$$
$$3y' - 2x' - 5 = 0$$
$$-2x' + 3y' - 5 = 0$$
$$-2x + 3y - 5 = 0$$

Jadi persamaan bayangan garis l adalah $-2x + 3y - 5 = 0$

5. Refleksi terhadap garis $y = -x$

Anak-anakku, untuk memahami konsep refleksi terhadap garis $y = -x$ mari kita amati pencerminan segitiga ABC pada gambar 11. Bagaimana perubahan setiap titik A, B, C pada segitiga ABC setelah dicerminkan terhadap garis $y = -x$?



Gambar 11. Segitiga ABC direfleksikan terhadap garis $y = x$
Sumber : e-modul Matematika kelas XI

Pada gambar 11, kita dapat melihat bahwa segitiga A'B'C' merupakan bayangan dari segitiga ABC setelah dicerminkan terhadap garis $y = -x$. Anak-anak, untuk mudah memahami perubahan koordinat setiap titik A, B dan C yang terjadi pada segitiga ABC dapat dilihat pada tabel 6.

Tabel 6. Koordinat pencerminan titik
pada segitiga terhadap garis $y = -x$

Titik	Koordinat Bayangan
A (-5,9)	A'(5, -9)
B (7,3)	B'(-3, -7)
C (4,12)	C'(-12, -4)

Berdasarkan pengamatan pada gambar 11 dan tabel 6, secara umum diperoleh

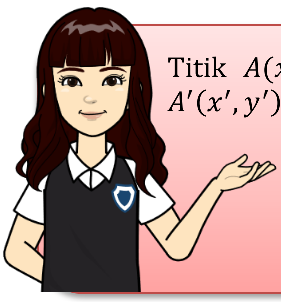
Jika titik $A(x, y)$ dicerminkan terhadap garis $y = -x$, maka akan menghasilkan bayangan $A'(-y, -x)$

Anak-anakku, mari kita mencari matriks pencerminan terhadap garis $y = -x$

Kita misalkan matriks transformasinya adalah $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sehingga diperoleh

$$A(x, y) \overset{M_{y=-x}}{\rightarrow} A'(y, x)$$
$$\begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

Dengan kesamaan dua matriks diperoleh:
$-y = ax + by$ agar ruas kiri dan kanan bernilai sama maka $a = 0$ dan $b = -1$
Cek :
Substitusi $a = 0$ dan $b = -1$ ke persamaan $-y = ax + by$
$$-y = 0 \cdot x + (-1) \cdot y$$
$$-y = -y$$
$-x = cx + dy$ agar rus kiri dan kanan bernilai sama maka $c = -1$ dan $d = 0$
Cek :
Substitusi $c = -1$ dan $d = 0$ ke persamaan $-x = cx + dy$
$$-x = (-1) \cdot x + 0 \cdot y$$
$$-x = -x$$
Berdasarkan uraian di atas diperoleh matriks pencerminan terhadap garis $y = -x$ adalah $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$



Titik $A(x, y)$ dicerminkan terhadap garis $y = -x$ menghasilkan bayangan $A'(x', y')$ ditulis dengan

$$A(x, y) \xrightarrow{M_{y=-x}} A'(x', y')$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Anak-anakku, untuk lebih memahami konsep refleksi terhadap garis $y = -x$ perhatikan beberapa contoh soal berikut

Contoh Soal 1:

Jika titik $P(-5,4)$ dicerminkan terhadap garis $y=-x$ maka bayangan titik P adalah

$$P(-5,4) \xrightarrow{M_{y=-x}} P'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan titik P adalah $P'(-4,5)$

Contoh Soal 2:

Jika garis $g: 4x-3y+11=0$ dicerminkan terhadap garis $y=-x$maka hasil bayangan garis l adalah ...

Pembahasan:

Misal titik $A(x,y)$ memenuhi persamaan $4x-3y+11=0$ sehingga

$$A(x,y) \xrightarrow{M_{y=-x}} A'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix}$$

Berdasarkan kesamaan dua matriks diperoleh

$$x' = -y \rightarrow y = -x'$$
$$y' = -x \rightarrow x = -y'$$

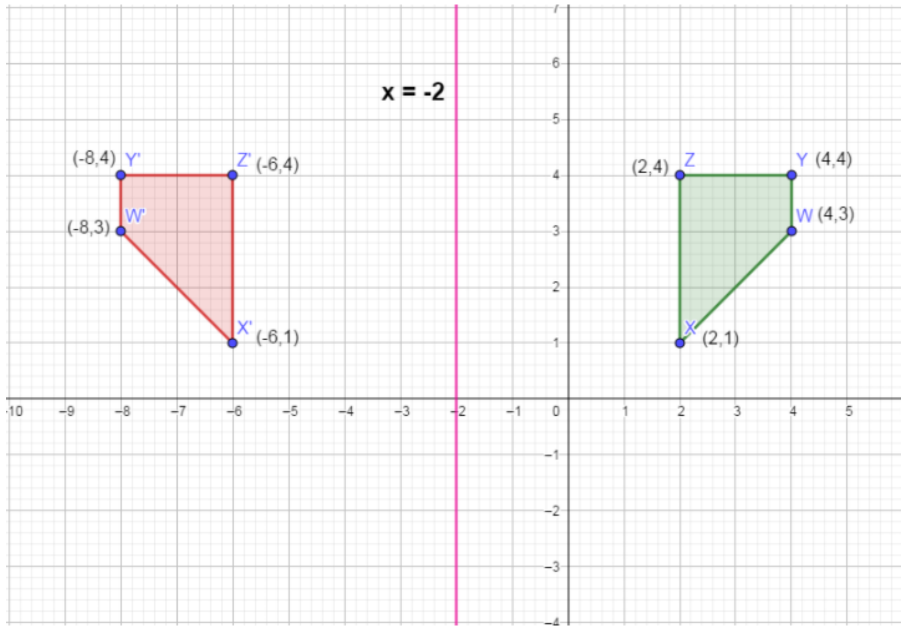
Substitusi $x=-y'$dan$y=-x'$ ke persamaan garis l

$$\begin{aligned} 4x-3y+11 &= 0 \\ 4(-y')-3(-x')+11 &= 0 \\ -4y'+3x'+11 &= 0 \\ 3x'-4y'+11 &= 0 \\ 3x-4y+11 &= 0 \end{aligned}$$

Jadi persamaan bayangan garis g adalah $3x-4y+11=0$

6. Refleksi terhadap garis $x=h$

Anak-anakku, untuk memahami konsep refleksi terhadap garis $x=h$ mari kita amati pencerminan segi empat XWYZpada gambar 12. Bagaimana perubahan setiap titik X, W, Y, dan Z pada segi empat XWYZ setelah dicerminkan terhadap garis $x=h$?



Gambar 12. Segi empat XWYZ direfleksikan terhadap garis $x = h$
Sumber : http://panduangeogebra.blogspot.com/

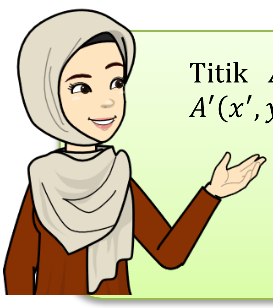
Pada gambar 12, kita dapat melihat bahwa segiempat X’W’Y’Z’ merupakan hasil pencerminan dari segiempat XWYZ setelah direfleksikan terhadap garis $x = h$. Anak-anak, untuk mudah memahami perubahan koordinat setiap titik X, Y, W dan Z yang terjadi pada segiempat XWYZ dapat dilihat pada tabel 7.

Tabel 7. Koordinat pencerminan titik
pada segi empat terhadap garis $x = h$

Titik	**Koordinat Bayangan**
X (2, 1)	X’(-6, 1)
Y (4,4)	Y’(-8, 4)
W (4, 3)	W’(-8, 3)
Z (2, 4)	Z’(-6, 4)

Berdasarkan pengamatan pada gambar 12 dan tabel 7, terlihat perubahan titik terjadi pada koordinat x sedangkan untuk koordinat y tetap, sehingga secara umum diperoleh

Jika titik $A(x, y)$ dicerminkan terhadap garis $x = h$, maka akan menghasilkan bayangan $A'(2h - x, y)$



Titik $A(x, y)$ dicerminkan terhadap garis $x = h$ menghasilkan bayangan $A'(x', y')$ ditulis dengan

$$A(x, y) \xrightarrow{M_{x=h}} A'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2h \\ 0 \end{pmatrix}$$

Anak-anakku, untuk lebih memahami konsep refleksi terhadap garis $x = h$ perhatikan beberapa contoh soal berikut

Contoh Soal 1:

Jika titik $P(5, 2)$ dicerminkan terhadap garis $x = 2$ maka bayangan titik P adalah ...

Pembahasan:

$$P(5,2) \xrightarrow{M_{x=2}} P'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2h \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+4 \\ 2+0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan titik P adalah $P'(-1, 2)$

Contoh Soal 2:

Jika kurva $y = x^2 + 3x - 5$ dicerminkan terhadap garis $x = 2$ maka hasil bayangan kurva adalah ...

Pembahasan:

Misal titik $A(x, y)$ memenuhi persamaan $y = x^2 + 3x - 5$ sehingga

$$A(x,y) \xrightarrow{M_{x=2}} A'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2h \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+4 \\ y \end{pmatrix}$$

Berdasarkan kesamaan dua matriks diperoleh

$$x' = -x + 4 \rightarrow x = 4 - x'$$
$$y' = y \rightarrow y = y'$$

Substitusi $x = 4 - x'$ dan $y = y'$ ke persamaan kurva $y = x^2 + 3x - 5$

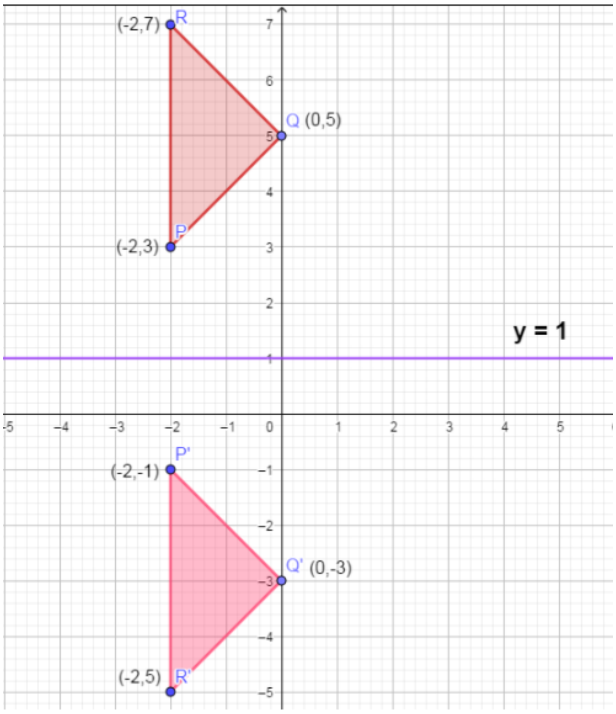
$$y' = (4 - x')^2 + 3(4 - x') - 5$$
$$y' = (4 - x')(4 - x') + 3(4 - x') - 5$$
$$y' = 16 - 4x' - 4x' + x'^2 + 12 - 3x' - 5$$
$$y' = x'^2 - 4x' - 4x' - 3x' + 16 + 12 - 5$$
$$y' = x'^2 - 11x' + 23$$

$$y = x^2 - 11x + 23$$

Jadi persamaan bayangan garis g adalah $y = x^2 - 11x + 23$

7. Refleksi terhadap garis $y = k$

Anak-anakku, untuk memahami konsep refleksi terhadap garis $y = k$ mari kita amati pencerminan segitiga PQR pada gambar 13. Bagaimana perubahan setiap titik P, Q, dan R pada segitiga PQR setelah dicerminkan terhadap garis $y = k$?



Gambar 13. Segitigs PQR direfleksikan terhadap garis $y = k$
Sumber : http://panduangeogebra.blogspot.com/

Pada gambar 13, kita dapat melihat bahwa segitiga P’Q’R’ merupakan hasil pencerminan dari segitiga PQR setelah direfleksikan terhadap garis $y = k$. Anak-anak, untuk mudah memahami perubahan koordinat setiap titik P, Q dan R yang terjadi pada segitiga PQR dapat dilihat pada tabel 8.

Tabel 8. Koordinat pencerminan titik pada segitiga terhadap garis $y = k$

Titik	Koordinat Bayangan
P (-2, 3)	P’(-2, -1)
Q (0, 5)	Q’(0, -3)
R (-2, 7)	R’(-2, 5)

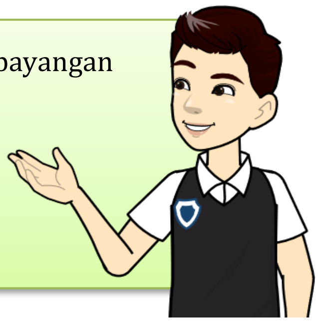
Berdasarkan pengamatan pada gambar 13 dan tabel 8, terlihat perubahan titik terjadi pada koordinat x sedangkan untuk koordinat y tetap, sehingga secara umum diperoleh

Jika titik $A(x, y)$ dicerminkan terhadap garis $y = k$, maka akan menghasilkan bayangan $A'(x, 2k - y)$

Titik $A(x,y)$ dicerminkan terhadap garis $y=k$ menghasilkan bayangan $A'(x',y')$ ditulis dengan

$$A(x,y) \xrightarrow{M_{y=k}} A'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2k \end{pmatrix}$$



Anak-anakku, untuk lebih memahami konsep refleksi terhadap garis $y=k$ perhatikan beberapa contoh soal berikut

Contoh Soal 1:

Jika titik $P(5,2)$ dicerminkan terhadap garis $y=2$ maka bayangan titik P adalah ...

Pembahasan:

$$P(5,2) \xrightarrow{M_{y=2}} P'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2k \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2\cdot 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+0 \\ -2+4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan titik P adalah $P'(5,2)$

Contoh Soal 2:

Jika kurva $y = x^2 + 3x - 5$ dicerminkan terhadap garis $y=2$ maka hasil bayangan kurva adalah ...

Pembahasan:

Misal titik $A(x,y)$ memenuhi persamaan $y = x^2 + 3x - 5$ sehingga

$$A(x,y) \xrightarrow{M_{y=2}} A'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2k \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2\cdot 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y+4 \end{pmatrix}$

Berdasarkan kesamaan dua matriks diperoleh

$$x' = x \to x = x'$$
$$y' = -y + 4 \to y = 4 - y'$$

Substitusi $x = x'$ dan $y = 4 - y'$ ke persamaan kurva $y = x^2 + 3x - 5$

$$(4 - y') = (x')^2 + 3(x') - 5$$
$$-y' = x'^2 + 3x' - 5 - 4$$
$$-y' = x'^2 + 3x' - 9$$
$$y' = -x'^2 + 3x' - 9$$
$$y = -x^2 + 3x - 9$$

Jadi persamaan bayangan garis g adalah $y = -x^2 + 3x - 9$

C. Rangkuman

1. **Refleksi (pencerminan)** adalah suatu transformasi yang memindahkan tiap titik pada bidang dengan menggunakan sifat bayangan oleh suatu cermin. Refleksi disimbolkan dengan M_a dengan a merupakan sumbu cermin.
2. **Sifat-sifat Refleksi:**
   1. Jarak dari titik asal ke cermin sama dengan jarak cermin ke titik bayangan
   2. Garis yang menghubungkan titik asal dengan titik bayangan tegak lurus terhadap cermin
   3. Garis-garis yang terbentuk antara titik-titik asal dengan titik-titik bayangan akan saling sejajar
3. **Jenis-jenis refleksi**
   Misalkan koordinat titik asal A(x, y) akan direfleksikan tehadap sumbu X, sumbu Y, titik asal O (0,0), garis $y = x$, garis $y = -x$, garis $x = h$, garis $y = k$, dan garis $y = x \tan \alpha$ akan menghasilkan bayangan sebagai berikut

efleksi	Titik Bayangan	Persamaan Matriks Transformasi
Sumbu X	$A'(x, -y)$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
Sumbu Y	$A'(-x, y)$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
Titik asal O (0,0)	$A'(-x, -y)$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
Garis $y = x$	$A'(y, x)$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
Garis $y = -x$	$A'(-y, -x)$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
Garis $x = h$	$A'(2h - x, y)$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2h \\ 0 \end{pmatrix}$
Garis $y = k$	$A'(x, 2k - y)$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2k \end{pmatrix}$

D. Latihan Soal

Anak- anak, untuk mengukur kemampuan pemahaman konsep kalian terhadap translasi kerjakan soal latihan berikut:

Soal Essay

1. Titik $A(3,-5)$ dicerminkan terhadap titik asal $(0,0)$. Koordinat bayangan titik A adalah …
2. Titik $P(5,-4)$ dicerminkan terhadap garis $y=x$. Koordinat bayangan titik P adalah …
3. Titik $Q(-3,7)$ dicerminkan terhadap garis $y=-x$. Koordinat bayangan titik Q adalah …
4. Titik $S(4,7)$ dicerminkan terhadap garis $y=2$. Koordinat bayangan titik S adalah …
5. Tentukan koordinat titik asal pada titik $B'(5,2)$ setelah direfleksi terhadap garis $x=3$
6. Tentukan bayangan bangun segitiga ABC dengan $A(1,2)$, $B(3,-2)$ dan $C(4,1)$ akan direfleksikan oleh M_y
7. Jika garis $2y-3x+6=0$ direfleksikan terhadap sumbu x, maka persamaan bayangan garis adalah …
8. Jika garis $x-2y-3=0$ dicerminkan terhadap sumbu Y, maka persamaan bayangannya adalah …
9. Parabola $y=x^2-3x+2$ dicerminkan terhadap sumbu y. Tentukan persamaan bayangan parabola
10. Lingkaran $x^2+y^2-3x+5y-3=0$ dicerminkan terhadap garis $y=-x$. Persamaan bayangan lingkaran adalah …

KEGIATAN PEMBELAJARAN 3
ROTASI (PERPUTARAN)

A. Tujuan Pembelajaran

Anak-anak setelah kegiatan pembelajaran 3 ini kalian diharapkan dapat :

1. Memahami tentang pengertian rotasi.
2. Menentukan rotasi titik terhadap pusat $(0, 0)$
3. Menentukan rotasi kurva terhadap pusat $(0, 0)$
4. Menentukan rotasi titik terhadap pusat (a, b)
5. Menentukan rotasi kurva terhadap pusat (a, b)

B. Uraian Materi

Pengertian Rotasi

Pada kegiatan pembelajaran 3 ini kita akan membahas gerak berputar atau dalam transformasi geometri disebut rotasi. Komedi putar, gangsing, kipas angin, dan jarum jam merupakan beberapa contoh objek yang bergerak dengan berputar. Gambar 14 menunjukkan anak-anak yang sedang bermain gangsing. Ketika bermain, gangsing dapat diputar serah jarum jam ataupun berlawanan arah jarum jam dengan pusat tertentu. Dalam matematika proses memutar gangsing termasuk dalam rotasi.

Gambar 14 Anak-anak bermain gangsing
Sumber : https://lembagakebudayaanbetawi.org/gangsing-gasing/

Rotasi adalah transformasi yang memindahkan titik-titik dengan cara memutar titik-titik tersebut sejauh α terhadap suatu titik tertentu.
Rotasi pada bidang datar ditentukan oleh :

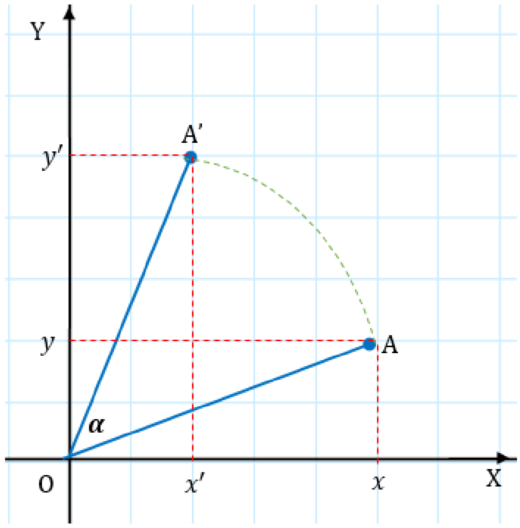
1. Titik pusat rotasi
2. Besar sudut rotasi
3. Arah sudut rotasi

Sudut rotasi merupakan sudut antara garis yang menghubungkan titik asal dan pusat rotasi yang menghubungkan titik bayangan dan pusat rotasi.
Jika **arah rotasi** diputar **searah jarum jam** maka besar sudut rotasi negatif $(-\boldsymbol{\alpha})$
Jika **arah rotasi** diputar **berlawanan jarum jam** maka besar sudut rotasi poitif $(\boldsymbol{\alpha})$

Rotasi dinotasikan dengan $\boldsymbol{R(P,\alpha)}$ dimana P merupakan pusat rotasi dan α besar sudut rotasi.

Rotasi terhadap titik pusat $(0,0)$

Anak-anakku, untuk memahami bentuk rotasi pada titik pusat (0, 0), kita bisa amati perpindahan titik A pada gambar 15.



Gambar 15 Rotasi titik A terhadap titik puat O(0, 0)
Sumber : Koleksi pribadi

Misalkan terdapat sebuah titik $A(x,y)$ akan dirotasikan sebesar α dengan pusat $(0,0)$ dan akan menghasilkan titik $A'(x',y')$ dan dapat dituliskan sebagai berikut.

$$A(x,y) \xrightarrow{R_{[O(0,0),\alpha]}} A'(x',y')$$

Titik (x,y) dirotasikan sebesar α terhadap titik pusat $(0,0)$ menghasilkan bayangan titik (x',y') dengan aturan

$$\boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

Anak-anakku, untuk lebih memahami konsep rotasi terhadap titik pusat (0, 0) perhatikan beberapa contoh soal berikut

Contoh Soal 1:

Tentukan bayangan titik $C(3,1)$ jika dirotasikan berlawanan arah jarum jam sebesar $90°$ dan berpusat $(0,0)$!

Pembahasan :
Koordinat titik $C(3,1)$ akan dirotasikan $R_{[O(0,0),90°]}$

$$C(3,1) \xrightarrow{R_{[O(0,0),90°]}} C'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Jadi, hasil bayangan titik C adalah $C'(-1, 3)$

Contoh Soal 2:

Garis $3x - 4y + 12 = 0$ dirotasikan sebesar 180° terhadap titik pusat $(0, 0)$. Persamaan garis hasil rotasi adalah …

Pembahasan :
Misalkan titik $A(x, y)$ memenuhi persamaan garis $3x - 4y + 12 = 0$ sehingga

$$A(x, y) \xrightarrow{R_{[O(0,0),180^\circ]}} A'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 180^\circ & -\sin 180^\circ \\ \sin 180^\circ & \cos 180^\circ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

Berdasarkan kesamaan dua matriks diperoleh

$$x' = -x \rightarrow x = -x'$$
$$y' = -y \rightarrow y = -y'$$

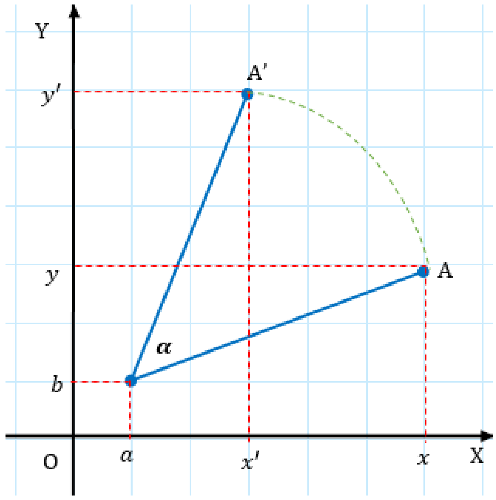
Substitusi $\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}'$dan $\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{y}'$ ke persamaan garis $3x - 4y + 12 = 0$ diperoleh

$$3(-x') - 4(-y') + 12 = 0$$
$$-3x' + 4y' + 12 = 0$$
$$-3x + 4y + 12 = 0$$

Jadi, persamaan garis hasil rotasi adalah $-3x + 4y + 12 = 0$

Rotasi terhadap titik pusat $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$

Anak-anakku, untuk memahami bentuk rotasi pada titik pusat (a, b), kita bisa amati perpindahan titik A pada gambar 16.



Gambar 16 Rotasi titik A terhadap titik puat O(a, b)
Sumber : Koleksi pribadi

Misalkan terdapat sebuah titik $A(x, y)$ akan dirotasikan sebesar α dengan pusat (a, b) dan akan menghasilkan titik $A'(x', y')$ dan dapat dituliskan sebagai berikut.

$$A(x, y) \xrightarrow{R_{[(a,b),\alpha]}} A'(x', y')$$

Titik (x, y) dirotasikan sebesar α terhadap titik pusat (a, b) menghasilkan bayangan titik (x', y') dengan aturan

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Anak-anakku, untuk lebih memahami konsep rotasi terhadap titik pusat (a, b) perhatikan beberapa contoh soal berikut

Contoh Soal 1:

Tentukan bayangan titik $C(3, 1)$ jika dirotasikan berlawanan arah jarum jam sebesar 90° dan berpusat $(2, 4)$!

Pembahasan :
Koordinat titik $C(3, 1)$ akan dirotasikan $R_{[(2,4),90°]}$

$$C(3, 1) \xrightarrow{R_{[(2,4),90°]}} C'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90° & -\sin 90° \\ \sin 90° & \cos 90° \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3-2 \\ 1-4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2 \\ 1+4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Jadi, hasil bayangan titik C adalah $C'(4,5)$

Contoh Soal 2:

Garis $3x - 4y + 12 = 0$ dirotasikan sebesar $180°$ terhadap titik pusat $(1,2)$. Persamaan garis hasil rotasi adalah ...

Pembahasan :

Misalkan titik $A(x,y)$ memenuhi persamaan garis $3x - 4y + 12 = 0$ sehingga

$$A(x,y) \xrightarrow{R_{[(1,2),180°]}} A'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 180° & -\sin 180° \\ \sin 180° & \cos 180° \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1(x-1) \\ -1(y-2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+1 \\ -y+2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+1+2 \\ -y+2+2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+3 \\ -y+4 \end{pmatrix}$$

Berdasarkan kesamaan dua matriks diperoleh

$$x' = -x + 3 \rightarrow x = 3 - x'$$
$$y' = -y + 4 \rightarrow y = 4 - y'$$

Substitusi $\boldsymbol{x = 3 - x'}$ dan $\boldsymbol{y = 4 - y'}$ ke persamaan garis $3x - 4y + 12 = 0$ diperoleh

$$3(3 - x') - 4(4 - y') + 12 = 0$$
$$9 - 3x' - 16 + 4y' + 12 = 0$$
$$-3x' + 4y' + 9 - 16 + 12 = 0$$
$$-3x' + 4y' + 5 = 0$$
$$-3x + 4y + 5 = 0$$

Jadi, persamaan garis hasil rotasi adalah $-3x + 4y + 5 = 0$

C. Rangkuman

1. **Rotasi** adalah transformasi yang memindahkan titik-titik dengan cara memutar titik-titik tersebut sejauh α terhadap suatu titik tertentu.
2. Rotasi pada bidang datar ditentukan oleh :
   1. Titik pusat rotasi
   2. Besar sudut rotasi
   3. Arah sudut rotasi
      a. Jika **arah rotasi** diputar **searah jarum jam** maka besar sudut rotasi negatif $(-\boldsymbol{\alpha})$
      b. Jika **arah rotasi** diputar **berlawanan jarum jam** maka besar sudut rotasi poitif $(\boldsymbol{\alpha})$
3. Rotasi dinotasikan dengan $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{\alpha})$ dimana P merupakan pusat rotasi dan α besar sudut rotasi.
4. **Jenis-jenis rotasi berdasarkan titik pusat**

   Misalkan koordinat titik asal A(x, y) akan dirotasikan dengan besar sudut α terhadap pusat $(0, 0)$ dan pusat (a, b)akan menghasilkan bayangan sebagai berikut

Titik Pusat	Persamaan Matriks Transformasi
$(0, 0)$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
(a, b)	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

D. Latihan Soal

Anak- anak, untuk mengukur kemampuan pemahaman konsep kalian terhadap rotasi kerjakan soal latihan berikut:

Soal Essay:

1. Titik $A(-2, 3)$ dirotasikan sebesar 90° terhadap titik pusat $(0, 0)$. Hasil rotasi titik A adalah …
2. Titik $D(6\ 3)$ dirotasikan sebesar 270° terhadap titik pusat $(2, 4)$. Hasil rotasi titik D adalah …
3. Titik B dirotasikan sebsar 90° terhadap titik pusat $(2, 1)$ menghasilkan bayangan $B'(-2, 4)$. Koordinat titik B adalah …
4. Titik C dirotasikan sebsar 180° terhadap titik pusat $(2, 3)$ menghasilkan bayangan $C'(4, -1)$. Koordinat titik C adalah …
5. Bayangan titik $(4, -5)$ oleh rotasi $R[P, 90°]$ adalah $(10, 5)$. Titik pusat rotasi tersebut adalah …
6. Diketahui segitiga PQR dengan koordinat titik sudut $P(3, 2), Q(4, -1)$ dan $R(5, 3)$. Segitiga PQR diputar sebesar 180° terhadap titik pusat (0,0) diperoleh bayangan segitiga P'Q'R'. Koordinat P', Q' dan R' berturut-turut adalah …
7. Diketahui segitiga ABC dengan koordinat titik sudut $A(-3, 2), B(2, 4)$ dan $C(-1, -1)$. Segitiga ABC diputar sebesar $-\pi$ terhadap titik pusat (5,1) diperoleh bayangan segitiga A'B'C'. Koordinat A', B' dan C' berturut-turut adalah …
8. Persamaan garis $2x + y + 3 = 0$ dirotasikan dengan pusat $(0, 0)$ sebesar 90° berlawanan arah jarum jam. Tentukan persamaan bayangannya
9. Lingkaran $L: x^2 + y^2 = 9$ dirotasikan sebesar 90° terhadap titik $P(2, -1)$. Persamaan lingkaran hasil rotasi tersebut adalah …
10. Bayangan garis g oleh rotasi terhadap titik pusat $P(-4, 1)$ sebesar $\frac{3}{2}\pi$ adalah $3y + 2x + 24 = 0$. Persamaan garis g adalah …

KEGIATAN PEMBELAJARAN 4
DILATASI

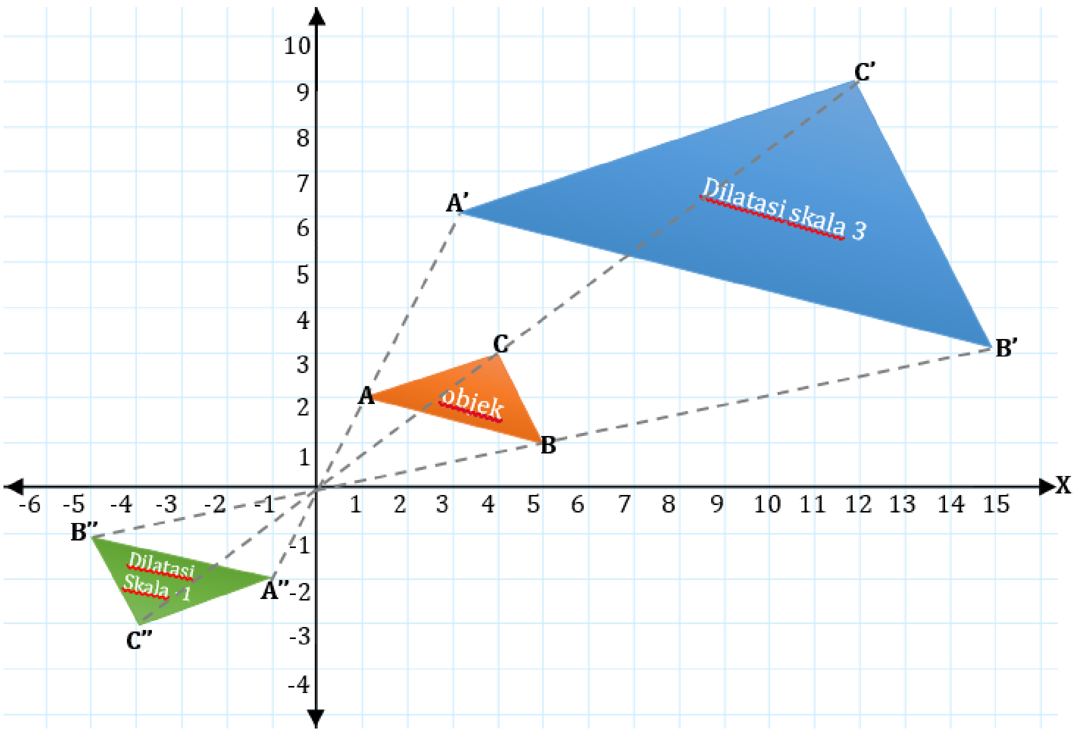
A. Tujuan Pembelajaran

Anak-anak setelah kegiatan pembelajaran 4 ini kalian diharapkan dapat :
1. Memahami pengertian dilatasi
2. Menentukan dilatasi titik pada pusat $(0, 0)$
3. Menentukan dilatasi kurva pada pusat $(0, 0)$
4. Menentukan dilatasi titik pada pusat (a, b)
5. Menentukan dilatasi kurva pada pusat (a, b)

B. Uraian Materi

Pengertian Dilatasi

Pernahkan kalian mencetak foto atau pasfoto? Bisaanya ketika mencetak pasfoto kita diminta menyebutkan ukuran seperti 2×3, 3×4 ataupun 4×6. Mencetak pasfoto dalam berbagai ukuran yaitu memperbesar atau memperkecil merupakan salah satu contoh dilatasi dalam kehidupan sehari-hari. Anak-anakku, untuk lebih memahami apa itu dilatasi, coba amati gambar 17 berikut. Apa yang dapat kalian ceritakan mengenai transformasi segitiga ABC ? Bagaimana transformasi yang terjadi ?



Gambar 17 Dilatasi segitiga ABC pada pusat $(0, 0)$
Sumber : Koleksi pribadi

Anak-anakku, jika kita amati segitiga ABC pada gambar 17, segitiga ABC akan semakin besar dengan perkalian skala 3. Kemudian, jarak OA' adalah tiga kali jarak OA, jarak OB' adalah tiga kali jarak OB, jarak OC' adalah tiga kali jarak OC. Tetapi ketika segitiga ABC dikalikan dengan faktor skala -1 menghasilkan besar dan ukuran yang sama tetapi

mempunyai arah yang berlawanan. Perhatikan juga jarak OA'' sama dengan jarak OA, jarak OB'' sama dengan jarak OB, dan jarak OC'' sama dengan jarak OC.
Berdasarkan uraian diatas, dapat disimpulkan :

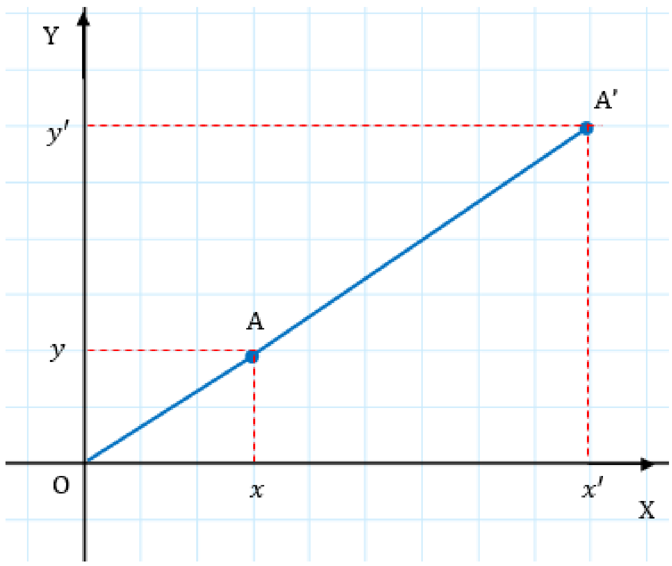
Dilatasi adalah transformasi yang mengubah jarak titik-titik dengan faktor pengali tertentu terhadap suatu titik tertentu. Faktor pengali tertentu disebut faktor dilatasi atau faktor skala dan titik tertentu disebut pusat dilatasi

Bangun yang diperbesar atau diperkecil (dilatasi) dengan skala k dapat mengubah ukuran atau tetap ukurannya tetapi tidak mengubah bentuk.

- Jika $k > 1$ maka bangun akan diperbesar dan terletak searah terhadap sudat dilatasi dengan bangun semula
- Jika $k = 1$ maka bangun tidak mengalami perubahan ukuran dan letak
- Jika $0 < k < 1$ maka bangun akan diperkecil dan terletak searah terhadap pusat dilatasi dengan bangun semula.
- Jika $-1 < k < 0$ maka bangun akan diperkecil dan terletak berlawanan arah terhadap pusat dilatasi dengan bangun semula
- Jika $k = -1$ maka bangun tidak akan mengalami perubahan bentuk dan ukuran dan terletak berlawanan arah terhadap pusat dilatasi dengan bangun semula.
- Jika $k < -1$ maka bangun akan diperbesar dan terletak berlawanan arah terhadap pusat dilatasi dengan bangun semula.

Dilatasi terhadap Titik Pusat $(0, 0)$

Bentuk dilatasi terhadap titik pusat $O(0, 0)$ dapat diamati pada gambar 18. Titik $A(x, y)$ didilatasikan dengan faktor skala k terhadap titik pusat $O(0, 0)$ menghasilkan titik $A'(x', y')$.



Gambar 18 Dilatasi titik A pada pusat $(0, 0)$
Sumber : Koleksi pribadi

Dilatasi titik A pada gambar 18 dapat dituliskan sebagai berikut.

$$A(x,y) \xrightarrow{D_{[O,k]}} A'(x',y')$$

Titik (x,y) didilatasikan dengan faktor skala k terhadap titik pusat $(0,0)$ menghasilkan bayangan titik (x',y') dalam persamaan matriks dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

Anak-anakku, untuk lebih memahami konsep dilatasi terhadap titik pusat $O(0,0)$ yuk kita simak contoh soal berikut

Contoh Soal 1:

Tentukan bayangan titik $A(2,4)$ setelah didilatasikan terhadap pusat $O(0,0)$ dan faktor skala 3 !

Pembahasan

Titik $A(2,4)$ akan didilatasikan oleh $D_{[O,3]}$ dapat ditulis

$$A(2,4) \xrightarrow{D_{[O,3]}} A'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan titik A setelah didilatasi oleh $D_{[O,3]}$ adalah $A'(6,12)$

Contoh Soal 2:

Garis $g : 2x + 4y - 3 = 0$ didilatasikan dengan faktor skala -2 terhadap titik pusat $(0,0)$. Persamaan garis g setelah didilatasi adalah ...

Pembahasan

Misalkan titik $A(x,y)$ memenuhi persamaan garis $g: 2x + 4y - 3 = 0$

$$A(x,y) \xrightarrow{D_{[O,-2]}} A'(x',y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \end{pmatrix}$$

Berdasarkan kesamaan dua matriks diperoleh

$$x' = -2x \rightarrow x = -\frac{1}{2}x'$$

$y' = -2y' \rightarrow y = -\dfrac{1}{2}y'$

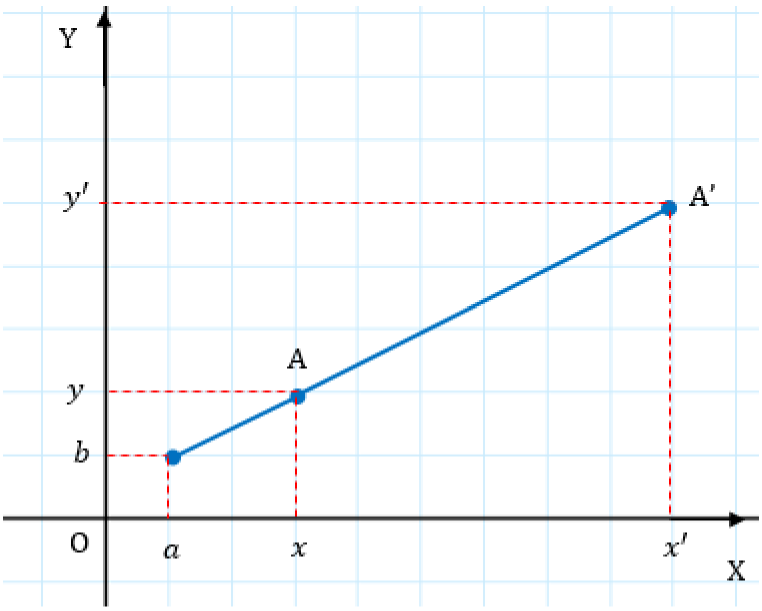
Substitusi $x = -\frac{1}{2}x'$ dan $y = -\frac{1}{2}y'$ ke persamaan garis $g: 2x + 4y - 3 = 0$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} 2x + 4y - 3 &= 0 \\ 2\left(-\frac{1}{2}x'\right) + 4\left(-\frac{1}{2}y'\right) - 3 &= 0 \\ -x' - 2y' - 3 &= 0 \\ x' + 2y' + 3 &= 0 \\ x + 2y + 3 &= 0 \end{aligned}$$

Jadi, persamaan garis g setelah didilatasi adalah $g': x + 2y + 3 = 0$

Dilatasi terhadap Titik Pusat (a, b)

Bentuk dilatasi terhadap titik pusat $P(a, b)$ dapat diamati pada gambar 19. Titik $A(x, y)$ didilatasikan dengan faktor skala k terhadap titik pusat $P(a, b)$menghasilkan titik $A'(x', y')$.



Gambar 19 Dilatasi titik A pada pusat (a, b)
Sumber : Koleksi pribadi

Dilatasi titik A pada gambar 19 dapat dituliskan sebagai berikut.

$$A(x, y) \xrightarrow{D_{[(a,b),k]}} A'(x', y')$$

Titik (x, y) didilatasikan dengan faktor skala k terhadap titik pusat (a, b) menghasilkan bayangan titik (x', y') dalam persamaan matriks dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}$$

Anak-anakku, untuk lebih memahami konsep dilatasi terhadap titik pusat $P(a, b)$ yuk kita simak contoh soal berikut

Contoh Soal 1:

Tentukan bayangan titik $A(-5, 2)$ setelah didilatasikan terhadap pusat $(3, 4)$ dan faktor skala -3 !

Pembahasan:
Titik $A(-5, 2)$ akan didilatasikan oleh $D_{[(3,4),-3]}$ dapat ditulis

$$A(-5, 2) \xrightarrow{D_{[(3,4),-3]}} A'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5-3 \\ 2-4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24+3 \\ 6+4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan titik A setelah didilatasi oleh $D_{[(3,4),-3]}$ adalah $A'(27, 10)$

Contoh Soal 2:

Garis $g : 2x + 4y - 3 = 0$ didilatasikan dengan faktor skala -2 terhadap titik pusat $(2, -4)$. Persamaan garis g setelah didilatasi adalah ...

Pembahasan
Misalkan titik $A(x, y)$ memenuhi persamaan garis $g: 2x + 4y - 3 = 0$

$$A(x, y) \xrightarrow{D_{[(2,-4),-2]}} A'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-(-4) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-2 \\ y+4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2(x-2) \\ -2(y+4) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x+4 \\ -2y-8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x+4+2 \\ -2y-8+(-4) \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x+6 \\ -2y-12 \end{pmatrix}$$

Berdasarkan kesamaan dua matriks diperoleh
$x' = -2x + 6$
$2x = 6 - x'$
$x = \dfrac{6 - x'}{2}$
$y' = -2y - 12$
$2y = -y' - 12$
$y = \dfrac{-y - 12}{2}$
Substitusi$x = \frac{6-x\prime}{2}$ dan $y = \frac{-y-12}{2}$ ke persamaan garis $g: 2x + 4y - 3 = 0$ sehingga diperoleh

$$
\begin{aligned}
2x + 4y - 3 &= 0 \\
2\left(\frac{6 - x'}{2}\right) + 4\left(\frac{-y - 12}{2}\right) - 3 &= 0 \\
6 - x' + 2(-y' - 12) - 3 &= 0 \\
6 - x' - 2y' - 24 - 3 &= 0 \\
-x' - 2y' - 21 &= 0 \\
x' + 2y' + 21 &= 0 \\
x + 2y + 21 &= 0
\end{aligned}
$$

Jadi, persamaan garis g setelah didilatasi adalah $g': x + 2y + 21 = 0$

C. Rangkuman

1. **Dilatasi** adalah transformasi yang mengubah jarak titik-titik dengan faktor pengali tertentu terhadap suatu titik tertentu. Faktor pengali tertentu disebut faktor dilatasi atau faktor skala dan titik tertentu disebut pusat ilatasi
2. Dilatasi dinotasikan dengan $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{k})$ dimana P merupakan pusat dilatasi dan k merupakan faktor skala
3. **Jenis-jenis dilatasi berdasarkan titik pusat**
   Misalkan koordinat titik asal A(x, y) akan didilatasikan dengan faktor skala k terhadap pusat $(0, 0)$ dan pusat (a, b)akan menghasilkan bayangan sebagai berikut

Titik Pusat	Persamaan Matriks Transformasi
$(0, 0)$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
(a, b)	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

D. Latihan Soal

Anak- anak untuk mengukur kemampuan pemahaman konsep kalian terhadap dilatasi kerjakan soal latihan berikut:

Soal Essay:
1. Titik $A(-2, -5)$ didilatasikan dengan faktor skala -2 terhadap titik pusat $(0, 0)$. Hasil dilatasi titik A adalah …
2. Titik B didilatasikan dengan faktor skala -2 terhadap titik pusat $(0, 0)$ menghasilkan titik $B'(-4, 6)$. Koordinat titik B adalah …

3. Titik $A(2,-3)$ didilatasikan dengan faktor skala 3 terhadap titik pusat $(1,-2)$. Hasil dilatasi titik A adalah …
4. Bayangan titik $Q(2,-1)$ oleh dilatasi terhadap titik pusat $(3,4)$ dengan faktor skala -3 adalah …
5. Titik D didilatasikan dengan faktor skala 2 terhadap titik pusat $(2,-3)$ menghasilkan titik $D'(3,6)$. Koordinat titik D adalah …
6. Titik $C(-2,-1)$ didilatasikan dengan faktor skala k terhadap titik pusat $(0,-3)$ menghasilkan titik $C'(4,-7)$. Nilai k yang memenuhi adalah …
7. Titik $R(-4,-2)$ didilatasikan dengan faktor skala $\frac{1}{3}$ dilanjutkan dengan dilatasi faktor skala -2 terhadap titik pusat $(-1,1)$. Hasil dilatasi titik R adalah …
8. Persamaan bayangan garis $4x - y + 6 = 0$ oleh dilatasi $[O,-2]$ adalah …
9. Garis $g : x + 2y - 4 = 0$ didilatasikan dengan faktor skala 2 terhadap titik pusat $(0,0)$. Hasil dilatasi garis g adalah …
10. Lingkaran $L : (x-1)^2 + (y+1)^2 = 9$ didilatasikan dengan faktor skala $\frac{1}{3}$ terhadap titik pusat $(1,2)$. Hasil dilatasi lingkran L adalah …

KEGIATAN PEMBELAJARAN 5
KOMPOSISI TRANSFORMASI

A. Tujuan Pembelajaran

Anak-anak setelah kegiatan pembelajaran 5 ini kalian diharapkan dapat :
1. Memahami pengertian komposisi transformasi
2. Menentukan komposisi transformasi pada titik
3. Menentukan komposisi transformasi pada kurva
4. Menentukan luas bayangan kurva setelah ditansformasi
5. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan transformasi geometri

B. Uraian Materi

Komposisi Transformasi

Anak-anakku, pada kegiatan pembelajaran sebelumnya kita sudah mempelajari beberapa macam transformasi geometri seperti translasi, refleksi, rotasi, dan dilatasi. Pernahkan kalian berpikir bagaimanaa bayangan sebuah titik jika ditransformasikan lebih dari sekali? Misalnya sebuah titik direfleksikan terhadap sumbu X kemudian dirotasikan sejauh 90° berlawanan arah jarum jam. Untuk mencari bayangan titik tersebut kita bisa menggunakan komposisi transformasi. **Komposisi transformasi** adalah transformasi majemuk yang memuat lebih dari satu transformasi yang dilakukan secara berurutan.

Diketahui T_1 merupakan transformasi yang memetakan titik $A(x, y)$ ke titik $A'(x', y')$ dan T_2 merupakan transformasi yang memetakan titik $A'(x', y')$ ke titik $A''(x'', y'')$. Transformasi yang memetakan titik $A(x, y)$ ke titik $A''(x'', y'')$ dapat ditulis sebagai berikut

$$\boldsymbol{A(x, y) \overset{T_2 \circ T_1}{\rightarrow} A''(x'', y'')}$$

Bentuk $T_2 \circ T_1$ disebut komposisi transformasi dan dibaca "T_2 komposisi T_1" artinya transformasi T_1 dilanjutkan oleh transformasi T_2 dan dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\boldsymbol{A(x, y) \overset{T_1}{\rightarrow} A'(x', y') \overset{T_2}{\rightarrow} A''(x'', y'')}$$

Catatan

Komposisi transformasi bisa berupa komposisi translasi, komposisi refleksi, komposisi rotasi, komposisi dilatasi, komposisi matriks tertentu atau komposisi dari translasi, refleksi, rotasi, dilatasi dan matriks tertentu.

Anak-anakku, untuk lebih memahami komposisi transformasi, yuk kita simak contoh soal berikut.

Contoh Soal 1:

Dikeatahui segi empat ABCD dengan $A(-1,4)$, $B(-4,3)$, $C(5,0)$ dan $D(1,-1)$. Bayangan segi empat tersebut setelah dicerminkan terhadap garis $y=-x$, kemudian diputar 90° dengan pusat $O(0,0)$ adalah ...

Pembahasan :
Transformasi geometri yang dialami segi empat ABCD adalah sebagai berikut

$$(x,y) \xrightarrow{M_{y=-x}} (x',y') \xrightarrow{R_{[O,90^\circ]}} (x'',y'')$$

Bentuk matriks untuk Refleksi $M_{y=-x}$ adalah $T_1=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$
Bentuk matriks untuk Rotasi $R_{[O,90^\circ]}$ adalah $T_2=\begin{pmatrix}\cos 90^\circ & -\sin 90^\circ\\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$
Langkah selanjutnya kita cari komposisi matriks transformasinya sebagai berikut

$$\begin{aligned}T_2\circ T_1 &= \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Selanjutnya kita cari persamaan transformasinya sebagai berikut
$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ -y\end{pmatrix}$

Bayangan titik $A(-1,4)$
$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 4\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ -4\end{pmatrix}$
Jadi, bayangan titik A adalah $B''(-1,-4)$

Bayangan titik $B(-4,3)$
$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4\\ 3\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\ -3\end{pmatrix}$
Jadi, bayangan titik B adalah $B''(-4,-3)$

Bayangan titik $C(5,0)$
$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\ 0\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ 0\end{pmatrix}$
Jadi, bayangan titik C adalah $C''(5,0)$

Bayangan titik $D(1,-1)$
$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$
Jadi, bayangan titik D adalah $D''(1,1)$

Contoh Soal 2:

Persamaan bayangan garis $3y+6x-1=0$ jika didilatasikan menggunakan faktor skala 2 dengan titik pusat $(0,0)$ dilanjutkan rotasi sejauh 90° berlawanan arah jarum jam dengan titik pusat $O(0,0)$ adalah ...

Pembahasan :
Persamaan garis g : $3y + 6x - 1 = 0$
T_1 adalah matriks transformasi dari dilatasi $D_{[O,2]}$
$T_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
T_2 adalah matriks transformasi untuk rotasi $R_{[O,90°]}$
$T_2 = \begin{pmatrix} \cos 90° & -\sin 90° \\ \sin 90° & \cos 90° \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
Langkah selanjutnya kita cari komposisi matriks transformasinya sebagai berikut
$T_2 \circ T_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
Selanjutnya kita cari persamaan transformasinya sebagai berikut
$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y \\ 2x \end{pmatrix}$
Dengan kesamaan dua matriks diperoleh
$x' = -2y \rightarrow y = -\frac{1}{2}x'$
$y' = 2x \rightarrow x = \frac{1}{2}y'$
Selanjutnya substitusi $x = \frac{1}{2}y'$ dan $y = -\frac{1}{2}x'$ ke persamaan garis $3y + 6x - 1 = 0$ diperoleh

$$3y + 6x - 1 = 0$$
$$3\left(-\frac{1}{2}x'\right) + 6\left(\frac{1}{2}y'\right) - 1 = 0$$
$$-\frac{3}{2}x' + 3y' - 1 = 0 \rightarrow$$

Kalikan persamaan dengan -2

$$3x' - 6y' + 2 = 0$$
$$3x - 6y + 2 = 0$$

Jadi, bayangan garis g adalah g' : $3x - 6y + 2 = 0$

Luas Daerah Bangun Hasil Transformasi

Misalkan matriks transformasi $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mentransformasikan bangun B menjadi bangun B', maka

$$\boldsymbol{Luas\ bangun\ B' = |\det A| \times Luas\ bangun\ B}$$

$|\det A|$ merupakan nilai mutlak dari determinan matriks A dan merupakan faktor perbesaran luas

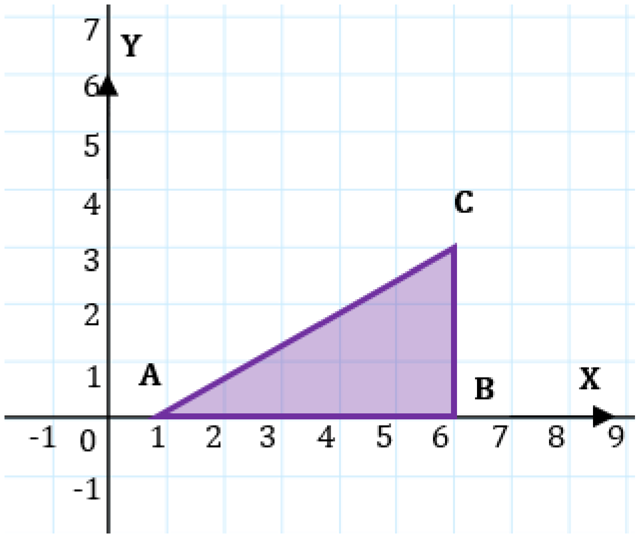
$$\det A = ad - bc$$

Untuk memahami konsep luas daerah bangun hasil transformasi, mari kita simak contoh soal berikut.

Contoh Soal 1:

Diketahui segitiga ABC dengan $A(1,0)$, $B(6,0)$ dan $C(6,3)$. Luas bayangan segitiga ABC oleh transformasi yang bersesuaian dengan matriks $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ adalah ...

Pembahasan :
Untuk menentukan luas segitiga ABC, perhatikan gambar berikut.



Pada gambar terlihat AB merupakan alas segitiga dengan panjang $AB = 5$ satuan dan BC merupakan tinggi segitiga dengan panjang $BC = 3$ satuan sehingga luas segitiga ABC adalah

$$\begin{aligned} Luas\ \Delta ABC &= \frac{1}{2} \times AB \times BC \\ &= \frac{1}{2} \times 5 \times 3 \\ &= \frac{15}{2} \end{aligned}$$

Selanjutnya kita cari determinan dari matriks transformasi yang bersesuaian yaitu

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det A &= ad - bc \\ &= 4 \cdot (-3) - 2 \cdot 1 \\ &= -12 - 2 \\ &= -14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Luas\ bayangan\ \Delta ABC &= |\det A| \times Luas\ \Delta ABC \\ &= |-14| \times \frac{15}{2} \\ &= 14 \times \frac{15}{2} \\ &= 105 \end{aligned}$$

Jadi, luas bayangan segitiga ABC adalah 105 satuan

C. Rangkuman

1. Komposisi transformasi bisa berupa komposisi translasi, komposisi refleksi, komposisi rotasi, komposisi dilatasi, komposisi matriks tertentu atau komposisi dari translasi, refleksi, rotasi, dilatasi dan matriks tertentu.
2. Komposisi transformasi $T_2 \circ T_1$ artinya transformasi terhadap T_1 dilanjutkan T_2. Bentuk $T_2 \circ T_1$ bersesuaian dengan perkalian matriks
$$T_2 \circ T_1 = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
3. Komposisi transformasi $T_1 \circ T_2$ artinya transformasi terhadap T_2 dilanjutkan T_1. Bentuk $T_1 \circ T_2$ bersesuaian dengan perkalian matriks
$$T_1 \circ T_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$
4. $Luas\ bangun\ B' = |\det A| \times Luas\ bangun\ B$, dengan $\det A = ad - bc$

D. Latihan Soal

Anak- anak, untuk mengukur kemampuan pemahaman konsep kalian terhadap komposisi transformasi kerjakan soal latihan berikut:

Soal Essay:

1. Jika titik $(3, 4)$ dirotasikan berlawanan arah jarum jam sejauh $45°$ dengan pusat titik asal, kemudian hasilnya dicerminkan terhadap garis $y = x$, maka koordinat bayangannya adalah …
2. Bayangan garis $3x + y = 4$ oleh transformasi yang bersesuaian dengan matriks $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ dilanjutkan oleh rotasi dengan pusat $O(0,0)$ sejauh $270°$ adalah …
3. Persamaan bayangan garis $y = x + 1$ ditransformasikan oleh matriks $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, dilanjutkan dengan pencerminan terhadap sumbu X adalah...
4. Persamaan bayangan parabola $y = x^2 - 3$ ditransformasi oleh refleksi terhadap sumbu X dilanjutkan oleh transformasi yang bersesuaian dengan matriks $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ adalah...
5. Segitiga KLM mempunyai koordinat $K(-1, -2), L(4, -2)$, dan $M(4, 0)$. Segitiga KLM ditransformasikan terhadap matriks $\begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Luas segitiga hasil transformasi adalah …
6. Diketahui dua buah rumah dengan letaknya masing-masing di $A(8, 2)$ dan $B(4, 5)$. Sebuah tiang listrik akan dipasang sepanjang jalan pada sumbu Y. Carilah letak tiang listrik agar kawat yang digunakan untuk menghubungkan rumah A dan B adalah minimum.