KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
DETERMINAN MATRIKS ORDO 2 X 2

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini diharapkan siswa mampu:

1. Menentukan determinan matriks ordo 2x2, sifat-sifat determinan matriks ordo 2x2,
2. Menggunakan determinan matriks dalam pemecahan masalah kehidupan sehari-hari dengan cermat.

B. Uraian Materi

1. Determinan Matriks berordo 2 x 2

Cermati permasalahan berikut ini:
Siti dan teman-temannya makan di kantin sekolah. Mereka memesan 3 ayam penyet dan 2 gelas es jeruk. Tak lama kemudian, Beni dan teman-temannya datang memesan 5 porsi ayam penyet dan 3 gelas es jeruk. Siti menantang Amir menentukan harga satu porsi ayam penyet dan harga es jeruk pergelas, jika Siti harus membayar Rp70.000,00 untuk semua pesanannya dan Beni harus membayar Rp115.000,00 untuk semua pesanannya

Alternatif Penyelesaian:
Cara I
Petunjuk: Ingat kembali materi sistem persamaan linear yang sudah kamu pelajari. Buatlah sistem persamaan linear dari masalah tersebut, lalu selesaikan dengan matriks.
Misalkan x = harga ayam penyet per porsi
y = harga es jeruk per gelas

Sistem persamaan linearnya: $3x + 2y = 70.000$
$5x + 3y = 115.000$

Dalam bentuk matriks adalah sebagai berikut.
$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70.000 \\ 115.000 \end{bmatrix}$

Ingat kembali bentuk umum Sistem Persamaan Linear Dua Variabel

$$ax + by = p$$
$$cx + dy = q$$

Apabila disajikan dalam bentuk matriks sebagai berikut:
$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ solusi persamaan tersebut adalah :

$x = \frac{dp - bq}{ad - bc}$ dan $y = \frac{aq - cp}{ad - bc}$, $ad \neq bc$

Cara II
Dalam konsep matriks ad – bc disebut dengan determinan matriks berordo 2 x 2.
Apabila matriks A berordo 2 x 2, yaitu $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ maka determinan dari matriks A didefinisikan sebagai:

$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ = ad – bc

Determinan dari suatu matriks persegi A dinotasikan dengan **det A atau |A|,** oleh karena itu nilai x dan y pada persamaan di atas dapat ditulis menjadi :

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$ dan y = $\dfrac{\begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$ dengan syarat $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$

Sehingga apabila kita kembalikan ke permasalahan awal, maka nilai x = harga ayam penyet per porsi dan nilai y = harga es jeruk per gelas dapat ditentukan dengan mempergunakan rumus di atas, yaitu :

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \dfrac{\begin{vmatrix} 70.000 & 2 \\ 115.000 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}} = \dfrac{70.000(3)-115.000(2)}{3(3)-2(5)} = \dfrac{210.000-230.000}{9-10} = \dfrac{-20.000}{-1}$ = 20.000 dan

y = $\dfrac{\begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 70.000 \\ 5 & 115.000 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}} = \dfrac{(3)115.000-(5)70.000}{3(3)-2(5)} = \dfrac{345.000-350.000}{9-10} = \dfrac{-5.000}{-1}$ = 5.000

jadi harga ayam penyet satu porsinya (x) adalah Rp. 20.000,00 dan harga es jeruk per gelasnya (y) adalah Rp. 5.000,00.

2. Sifat-sifat determinan matriks

Misalkan matriks A dan B berordo m x n dengan m,n ∈ N
1. Jika det A = $|A|$ dan det B = $|B|$, maka det A. det B = det AB atau $|A||B|$= $|AB|$
2. Jika det A = $|A|$ dan det A^t= $|A^t|$, maka det A = det A^t atau $|A|$= $|A^t|$
3. Jika det A = $|A|$ dan det A^{-1}= $|A^{-1}|$, maka $|A^{-1}|$ = $\frac{-1}{|A|}$

Contoh soal

1. Diketahui matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ tentukanlah det A !
2. Diketahuai matriks A = $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ dab matriks B = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ tentukanlah :
   a. det A
   b. det B
   c. det A det B
   d. det A^t

Jawaban:

1. Det A = $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ = 2(3) – (-7)(4) = 6 – (-28) = **34**
2. Diketahuai matriks A = $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ dan matriks B = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$
   maka :
   a. det A = $|A| = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$ = 4(6) – 2(5) = 24 – 10 = **14**
   b. det B = $|B|$ = $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ = 1(4) – 3(2) = 4 – 6 = - 2
   c. det A. det B = $|A||B|$ = 14 (-2) = **- 28**
      atau kita tentukan dulu hasil perkalian AxB
      AxB = $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$=$\begin{bmatrix} 4(1)+5(3) & 4(2)+5(4) \\ 2(1)+6(3) & 2(2)+6(4) \end{bmatrix}$= $\begin{bmatrix} 4+15 & 8+20 \\ 2+18 & 4+24 \end{bmatrix}$
      = $\begin{bmatrix} 19 & 28 \\ 20 & 28 \end{bmatrix}$

Jadi det AB=$|AB| = \begin{vmatrix} 19 & 28 \\ 20 & 28 \end{vmatrix}$= 19(28) – 20(28) = 532 – 560 = **- 28 (sifat ke 1)**

d. A = $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ maka A^t= $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$
   Sehingga det A^t= $|A^t|$= $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$=4(6) – 5(2)= 24 – 10 = **14 (sifat ke 2)**

C. Rangkuman

1. Apabila matriks A berordo 2 x 2, yaitu $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ maka determinan dari matriks A berordo 2 x 2 didefinisikan sebagai: $|A|$ = $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ = ad – bc
2. Sifat-sifat determinan matriks
   Misalkan matriks A dan B berordo m x n dengan m,n ∈ N
   a. Jika det A = $|A|$ dan det B = $|B|$, maka det A. det B = det AB atau $|A||B|$= $|AB|$
   b. Jika det A = $|A|$ dan det A^t= $|A^t|$, maka det A = det A^t atau $|A|$= $|A^t|$
   c. Jika det A = $|A|$ dan det A^{-1}= $|A^{-1}|$, maka $|A^{-1}|$ = $\frac{-1}{|A|}$

D. Latihan Soal

I. Latihan Soal Essay

Jawablah soal di bawah ini

1. Diketahui A = $\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$
   a. Tentukan determinan matriks A
   b. Tentukan invers matriks A

2. Ahmad, Budi dan Catur bersama-sama pergi ke toko buku. Ahmad membeli 2 buku dan 1 pensil dengan membayar Rp 8.000,00. Budi membeli 1 buku dan 3 pensil dengan membayar Rp 9000,00. Berapa yang harus dibayar oleh Catur bila ia membeli sebuah buku dan sebuah pensil ? (*Petunjuk*: selesaikan dengan menggunakan determinan)

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2
DETERMINAN MATRIKS ORDO 3 X 3

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 2 ini diharapkan siswa mampu:
1. menentukan determinan matriks ordo 3x3 dengan menggunakan Metode Sarrus dan metode kofaktor
2. Menyimpulkan sifat-sifat yang berlaku pada determinan matriks.

B. Uraian Materi

1. Determinan Matriks berordo 3 x 3

Cermati permasalahan berikut:
Sebuah perusahaan penerbangan menawarkan perjalanan wisata ke negara A, perusahaan tersebut mempunyai tiga jenispesawat yaitu Airbus 100, Airbus 200, dan Airbus 300. Setiap pesawat dilengkapi dengan kursi penumpang untuk kelas turis, ekonomi, dan VIP. Jumlah kursi penumpang dari tiga jenis pesawat tersebut disajikan pada tabel berikut.

Kategori	Airbus 100	Airbus 200	Airbus 300
Kelas Turis	50	75	40
Kelas Ekonomi	30	45	25
Kelas VIP	32	50	30

Perusahaan telah mendaftar jumlah penumpang yang mengikuti perjalanan wisata ke negara A seperti pada tabel berikut

Kategori	Jumlah Penumpang
Kelas Turis	305
Kelas Ekonomi	185
Kelas VIP	206

Berapa banyak pesawat masing-masing yang harus dipersiapkan untuk perjalanan tersebut?

Penyelesaian:

Untuk memudahkan kita menyelesaikan masalah ini, kita misalkan:
x = banyaknya pesawat Airbus100
y = banyaknya pesawat Airbus 200
z = banyaknya pesawat Airbus 300

Sistem persamaan yang terbentuk adalah:
$50x + 75y + 40z = 305$
$30x + 45y + 25z = 185$
$32x + 50y + 30z = 206$

Apabila kita tuliskan dalam bentuk matriks, maka persamaan matriks nya adalah:

$$\begin{bmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 305 \\ 185 \\ 206 \end{bmatrix}$$

Sebelum ditentukan penyelesaian masalah di atas, terlebih dahulu kita harus periksa apakah matriks A adalah matriks tak singular (Non singular).

- **Matriks Singular adalah Matriks yang determinannya sama dengan Nol dan tidak mempunyai matriks Inversnya**
- **Matriks Nonsingular adalah matriks yang determinannya tidak sama dengan Nol, dan mempunyai matriks Inversnya.**

Pada pembahasan sebelumnya kita sudah membahas tentang cara mencari determinan matriks yang berordo 2 x 2. Sekarang pembahasannya kita lanjutkan tentang bagaimanakah mencari determinan suatu matriks yang berordo 3 x 3?

2. Mencari determinan ordo 3x3 dengan Metode Sarrus

Sebenarnya ada beberapa cara untuk mencari determinan matriks, tetapi untuk pembahasan kita kali ini kita hanya akan membahas tentang menghitung determinan matriks yang berordo 3 x 3 dengan memakai metode **Sarrus**.

Baik sebelum kita lanjut ke materi pokoknya, kita berkenalan dulu dengan struktur matriks berordo 3 x 3. Apa sih yang dimaksud dengan matriks yang berordo 3 x 3?. Matriks 3 x 3 artinya matriks yang jumlah barisnya sebanyak tiga dan jumlah kolomnya juga sebanyak tiga. Secara lengkap matriks 3 x 3 bisa dilihat di bawah ini:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Atau jika ditulis sesuai dengan identitas baris dan kolomnya, maka penulisan matriks A diatas dapat ditulis dengan:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Dan untuk mencari determinannya maka matriks di atas kita keluarkan dua kolom pertama yaitu kolom pertama dan kolom kedua kita keluarkan menjadi

– – –

$$|A| = \left|\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}\right.$$

\+ + +

$$\boxed{\textbf{Det A} = |A| = \textbf{(aef + bfg + cdh) – (ceg + afh + bdi)}}$$

Setelah dua kolom pertama tadi kita keluarkan, kemudian kita tarik garis diagonal yang menghubungkan tiap tiga elemen seperti gambar. Garis yang rebah dari kiri atas ke kanan bawah kita berikan tanda "+" plus, dan sebaliknya garis diagonal yang rebah dari kanan atas ke kiri bawah kita berikan tanda "-" minus.

Selanjutnya determinan dihitung dengan mengalikan tiap garis yang segaris - maksudnya berada dalam satu garis diagonal – dan memberikan tanda sesuai dengan tanda dibawah garis.

Kelihatannya abstrak sekali kalau kita melihat rumus – rumusnya saja. Baiklah kita langsung saja sekarang kita lihat dan selesaikan soal permasalahan di atas dengan persamaan matriksnya:

$$\begin{bmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 305 \\ 185 \\ 206 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 50 & 75 \\ 30 & 45 \\ 32 & 50 \end{matrix}$$

= ((50x45x30)+(75x25x32)+(40x30x50)) – ((40x45x32)+(50x25x50)+(75x30x30))
= (67.500+60.000+60.000) – (57.600+62.500+67.500)
= 187.500 - 187.600
= **- 100**

Untuk menentukan nilai x, y, dan z kita akan menggunakan determinan matriks sebagai cara menyelesaikan permasalahan tersebut

$$\Delta X = \left|\begin{matrix} 305 & 75 & 40 \\ 185 & 45 & 25 \\ 206 & 50 & 30 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 305 & 75 \\ 185 & 45 \\ 206 & 50 \end{matrix}$$

=((305x45x30)+(75x25x206)+(40x185x50))–((40x45x206)+(305x25x50)+(75x185x30))
= (411.750+386.250+370.000) + (370.800+381.250+416.250)
= 1.168.000 - 1.168.300
= **- 300**

$$\Delta Y = \left|\begin{matrix} 50 & 305 & 40 \\ 30 & 185 & 25 \\ 32 & 206 & 30 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 50 & 305 \\ 30 & 185 \\ 32 & 206 \end{matrix}$$

=((50x185x30)+(305x25x32)+(40x30x206))-((40x185x32)+(50x25x206)+(305x30x30))
= (277.500+244.000+247.200) – (236.800+257.500+274.500)
= 768.700 - 768.800
= **- 100**

$$\Delta Z = \left|\begin{matrix} 50 & 75 & 305 \\ 30 & 45 & 185 \\ 32 & 50 & 206 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 50 & 75 \\ 30 & 45 \\ 32 & 50 \end{matrix}$$

=((50x45x206)+(75x185x32)+(305x30x50))-((305x45x32)+(50x185x50)+(75x30x206))
= (463.500+444.000+457.500) – (439.200+462.500+463.500)
= 1.365.000 - 1.365.200
= **- 200**

$x = \frac{\Delta X}{A} = \frac{\begin{vmatrix} 305 & 75 & 40 \\ 185 & 45 & 25 \\ 206 & 50 & 30 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{vmatrix}} = \frac{-300}{-100} = 3$ $y = \frac{\Delta Y}{A} = \frac{\begin{vmatrix} 50 & 305 & 40 \\ 30 & 185 & 25 \\ 32 & 206 & 30 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{vmatrix}} = \frac{-100}{-100} = 1$

$x = \frac{\Delta X}{A} = \frac{\begin{vmatrix} 50 & 75 & 305 \\ 30 & 45 & 185 \\ 32 & 50 & 206 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{vmatrix}} = \frac{-200}{-100} = 2$

Sehingga dari hasil perhitungan dengan menggunakan determinan, diperoleh kesimpulan, banyaknya pesawat Airbus 100 yang disediakan sebanyak 3 unit, banyaknya pesawat Airbus 200 yang disediakan sebanyak 1 unit, dan banyaknya pesawat Airbus 300 yang disediakan sebanyak 2 unit.

3. **Metode (Cara) Kofaktor**

Setelah kita membahas tentang mencari determinan menggunakan **Metode Sarrus**, berikutnya kita akan membahas tentang mencari determinan dengan menggunakan **Metode Kofaktor** suatu matriks yang berordo 3x3.

Baiklah kita langsung saja ke pokok bahasannya. Yang pertama kita bahas tentang kofaktor suatu matriks.
Kofaktor suatu matriks dirumuskan sebagai −1 pangkat baris ditambah kolom elemen minor dari matriks bersangkutan. Secara matematis dirumuskan sebagai :
K_{ij} = (-1) M^{i+j}. M_{ij}

Keterangan :
K_{ij} maksudnya kofaktor dari suatu matriks baris ke – i dan kolom ke – j.
i menyatakan baris
j menyatakan kolom.
M_{ij} merupakan minor baris ke – i kolom ke – j dari suatu matriks.

Contoh :
Tentukanlah kofaktor dari matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

Jawab :
Terlebih dulu kita cari minor dari matriks A tersebut. Disini minor dari matriks A di dapat :

$$M_A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Kemudian kita cari kofaktor tiap elemen dari minor tersebut :
Kofaktor Matriks A baris pertama kolom pertama, berarti i = 1 dan j = 1.
K_{ij} = (-1) M^{i+j}. M_{ij}
K_{11} = (-1) M^{1+1}. M_{11}
K_{11} = $(-1)^2$. 5
K_{11} = (1) 5 = 5
Kofaktor matriks A baris pertama kolom kedua, berarti i = 1 dan j = 2.
K_{12} = (-1) M^{1+2}. M_{12}
K_{12} = $(-1)^3$. M_{12}
K_{12} = (-1) . 3 = 3

Kofaktor matriks A baris kedua kolom pertama, berarti i = 2 dan j = 1
K_{21} = $(-1)^{2+1}. M_{21}$
K_{21} = $(-1)^3$. 4 = (- 1) 4 = - 4

Kofaktor matriks A baris kedua kolom kedua, berarti i = 2 dan j = 2
K_{22} = $(-1)^{2+2}. M_{22}$
K_{22} = $(-1)^4 2$ = 1. 2 = 2
Jadi, kofaktor dari matriks A adalah $K_A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

Sekarang bagaimana dengan Adjoinnya? Kita langsung mencari adjoin matriks A di atas. Tetapi terlebih dulu kita bahas secara singkat apa sih yang dimaksud dengan adjoin?

Adjoin merupakan transfose dari kofaktor matriks A. secara matematis dirumuskan sebagai :

$$Adj = K_A^T$$

Dimana :
K_A^T= Transpose kofaktor dari matriks A
Adj A = adjoin matriks A

Jika kita mau mencari adjoin sebuah matriks, maka terlebih dulu kita cari minornya dulu, setelah itu dari minor ini kita akan mendapatkan matriks kofaktor. Kemudian kofaktor ini kita transfuskan itulah adjoin sebuah matriks, dalam kalimat tadi ada kata transfose, apa yang dimaksud dengan matriks transfose?
Matriks transfose adalah matriks yang urutan baris diubah menjadi kolom dan kolom menjadi baris.
Dari soal di atas , maka kita bisa menentukan adjoinnya adalah sebagai berikut :

$$Adj\ A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

Sekarang bagaimana kalau matriksnya berordo 3 x 3?
Kita perhatikan contoh di bawah ini !

Contoh :
Tentukanlah Kofaktor dan Adjoin dari matriks berikut :
A = $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Penyelesaian :
Terlebih dahulu kita cari minor matriks A, disini didapat bahwa minor matriks A adalah :
M_{11}= artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 1 kolom ke 1 pada matrik ordo 3x3

$M_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ = $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ = 3(2) – 2(1) = 6 – 2 = 4

$M_{12} =$ artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 1 kolom ke 2 pada matrik ordo 3x3

$$M_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1(2) - 2(0) = 2 - 0 = 2$$

M_{13}= artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 1 kolom ke 3 pada matrik ordo 3x3

$$M_{13} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1(1) - 3(0) = 1 - 0 = 1$$

M_{21} = artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 2 kolom ke 1 pada matrik ordo 3x3

$$M_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4(2) - 6(1) = 8 - 6 = 2$$

M_{22} = artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 2 kolom ke 2 pada matrik ordo 3x3

$$M_{22} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2(2) - 6(0) = 4 - 0 = 4$$

M_{23} = artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 2 kolom ke 3 pada matrik ordo 3x3

$$M_{23} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2(1) - 4(0) = 2 - 0 = 2$$

M_{31} = artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 3 kolom ke 1 pada matrik ordo 3x3

$$M_{31} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4(2) - 6(3) = 8 - 18 = -10$$

M_{32} = artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 3 kolom ke 2 pada matrik ordo 3x3

$$M_{32} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(2) - 6(1) = 4 - 6 = -2$$

M_{33} = artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 3 kolom ke 3 pada matrik ordo 3x3

$$M_{33} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2(3) - 4(1) = 6 - 4 = 2$$

Jadi Minor Matriks A = $\begin{bmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{10} & \mathbf{-2} & \mathbf{2} \end{bmatrix}$

Sehingga kofaktor matriks A adalah:
Kofaktor Matriks A baris pertama kolom pertama, berarti i = 1 dan j = 1.
K_{ij} = (-1) M^{i+j}. M_{ij}
K_{11} = (-1) M^{1+1}. M_{11}
K_{11} = $(-1)^2$. 4
K_{11} = (1) 4 = **4**
Kofaktor matriks A baris pertama kolom kedua, berarti i = 1 dan j = 2.

K_{12} = (-1) M^{1+2}. M_{12}
K_{12} = (-1)³ . M_{12}
K_{12} = (-1) . 0 = **0**
Kofaktor matriks A baris pertama kolom ketiga, berarti i = 1 dan j = 3.
K_{13} = (-1) M^{1+3}. M_{13}
K_{13} = (-1)⁴ . M_{13}
K_{13} = (1) . 1 = **1**
Kofaktor matriks A baris kedua kolom pertama, berarti i = 2 dan j = 1
$K_{21} = (-1)^{2+1}. M_{21}$
$K_{21} = (-1)^{3}. 4$ = (- 1) 2 = **- 2**
Kofaktor matriks A baris kedua kolom kedua, berarti i = 2 dan j = 2
$K_{22} = (-1)^{2+2}. M_{22}$
$K_{22} = (-1)^{4}2$ = 1. 4 = **4**
Kofaktor matriks A baris kedua kolom ketiga, berarti i = 2 dan j = 3
$K_{23} = (-1)^{2+3}. M_{23}$
$K_{23} = (-1)^{5}2$ = -1. 2 = **- 2**
Kofaktor matriks A baris ketiga kolom pertama, berarti i = 3 dan j = 1
$K_{31} = (-1)^{3+1}. M_{31}$
$K_{31} = (-1)^{4}2$ = 1. 10 = **10**
Kofaktor matriks A baris ketiga kolom kedua, berarti i = 3 dan j = 2
$K_{32} = (-1)^{3+2}. M_{32}$
$K_{22} = (-1)^{5}$(-2) = -1(-2) = **2**
Kofaktor matriks A baris ketiga kolom ketiga, berarti i = 3 dan j = 3
$K_{33} = (-1)^{3+3}. M_{33}$
$K_{23} = (-1)^{6}(2) = 1(2) =$ **2**

Jadi Kofaktor Matriks A = $\begin{bmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{4} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{10} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{bmatrix}$

Adjoin matriks A dicari dengan mencari transpose dari kofaktor matriks A, sehingga :

$$Adj\ A = A^T = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 10 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

C. Rangkuman

1. **Matriks Singular** adalah Matrisk yang determinannya sama dengan Nol dan tidak mempunyai matriks Inversnya.
2. **Matriks Nonsingular** adalah matriks yang determinannya tidak sama dengan Nol, dan mempunyai matriks Inversnya.
3. **Determinan matriks berordo 3 x 3 dengan metode (cara) Sarrus**

   Apabila matriks A berordo 3 x 3, yaitu A = $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ maka determinan dari matriks A berordo 3 x 3 didefinisikan sebagai:

$$\begin{array}{c} - \quad - \quad - \\ |A| = \left|\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\right| \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix} \\ + \quad + \quad + \end{array}$$

det A = $|A|$ = (aef + bfg + cdh) – (ceg + afh + bdi)

KEGIATAN PEMBELAJARAN 3
INVERS MATRIKS

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 3 ini diharapkan siswa mampu:
1. Menentukan invers matriks ordo 2x2 dan ordo 3x3
2. Membuat kesimpulan mengenai cara menyelesaikan operasi matriks dengan menggunakan sifat-siftanya, serta pemanfaatan nilai determinan atau invers matriks dalam pemecahan masalah nyata.

B. Uraian Materi

Invers Matriks

Perhatikan masalah bentuk matriks berordo 2x2 di atas. Selain dengan menggunakan metode determinan, kita bisa menentukan nilai x dan y permasalahan di atas dengan metode Invers Matriks.

Apakah Invers Matriks itu?

Invers matriks A adalah sebuah matriks baru yang merupakan kebalikan dari matriks A dan apabila dikalikan antara matriks A dengan kebalikannya akan menghasilkan matriks Identitas. **Invers matriks A dinotasikan dengan $\boldsymbol{A^{-1}}$**

- Invers dari matriks A yang mempunyai ordo 2x2 A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ adalah

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{det\ A}}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

- Invers dari matriks A yang mempunyai ordo 3x3 A = $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ adalah

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{det\ A}}\,\textbf{Adj A}$$

$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70.000 \\ 115.000 \end{bmatrix} \longrightarrow$ A.X = B $\leftrightarrow$ X = $\boldsymbol{A^{-1}}$ **B**

Karena matriks A adalah matriks Nonsingular (matriks yang determinannya sama dengan Nol, dan mempunyai kebalikan/Invers), oleh karena itu, akan kita coba menentukan nilai x dan y dengan menggunakan metode Invers, sebagai berikut:

$$X = A^{-1}B \longrightarrow \boldsymbol{A^{-1}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{det\ A}}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{ad-bc}}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3(3)-2(5)}}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9-10}}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{-1}}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \boldsymbol{A^{-1}} \begin{bmatrix} 70.000 \\ 115.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 70.000 \\ 115.000 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} (-3)70.000 + 2(115.00) \\ 5(70.000) + (-3)(115.000) \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -210.000 + 230.000 \\ 350.000 + (-345.000) \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 20.000 \\ 5.000 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20.000 \\ 5.000 \end{bmatrix}$ sehingga nilai x = 20.000 dan y = 5.000

Dengan demikian jawaban untuk permasalahan di atas dapat diselesaikan dengan dua metode (cara) yaitu dengan metode (cara) determinan dan dengan metode (cara) invers yang menghasilkan nilai atau jawaban yang sama.

Untuk melengkapi contoh selanjutnya, akan kita bahas permasalahan pada matriks yang berordo 3x3.
Perhatikan permasalahan yang sudah dibahas sebelumnya dengan menggunakan metode determinan, sekarang permasalahan tersebut akan kita selesaikan dengan metode invers.

$\begin{bmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 305 \\ 185 \\ 206 \end{bmatrix}$

Terlebih dahulu kita cari minor matriks A, disini didapat bahwa minor matriks A adalah :
M_{11}= artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 1 kolom ke 1 pada matrik ordo 3x3

$M_{11} = \begin{bmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 45 & 25 \\ 50 & 30 \end{vmatrix}$ = 45(30) – 25(50) = 1350 – 1.250 = **100**

$M_{12} =$ artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 1 kolom ke 2 pada matrik ordo 3x3

$M_{12} = \begin{bmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 30 & 25 \\ 32 & 30 \end{vmatrix}$ = 30(30) – 25(32) = 900 – 800 = **100**

M_{13}= artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 1 kolom ke 3 pada matrik ordo 3x3

$M_{13} = \begin{bmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 30 & 45 \\ 32 & 50 \end{vmatrix}$ = 30(50) – 45(32) = 1.500 – 1.440 = **60**

$M_{21} =$ artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 2 kolom ke 1 pada matrik ordo 3x3

$M_{21} = \begin{bmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 75 & 40 \\ 50 & 30 \end{vmatrix}$ = 75(30) – 40(50) = 2.250 – 2.000 = **250**

$M_{22} =$ artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 2 kolom ke 2 pada matrik ordo 3x3

M_{22}= $\begin{bmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{bmatrix}$ = $\begin{vmatrix} 50 & 40 \\ 32 & 30 \end{vmatrix}$ = 50(30) – 40(32) = 1.500 – 1.280 = **220**

$M_{23} =$ artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 2 kolom ke 3 pada matrik ordo 3x3

M_{23}= $\begin{bmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{bmatrix}$ = $\begin{vmatrix} 50 & 75 \\ 32 & 50 \end{vmatrix}$ = 50(50) – 75(32) = 2.500 – 2.400 = **100**

$M_{31} =$ artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 3 kolom ke 1 pada matrik ordo 3x3

M_{31}= $\begin{bmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{bmatrix}$ = $\begin{vmatrix} 75 & 40 \\ 45 & 25 \end{vmatrix}$ = 75(25) – 40(45) = 1.875 – 1.800 = **75**

$M_{32} =$ artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 3 kolom ke 2 pada matrik ordo 3x3

M_{32}= $\begin{bmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{bmatrix}$ = $\begin{vmatrix} 50 & 40 \\ 30 & 25 \end{vmatrix}$ = 50(25) – 40(30) = 1.250 – 1.200 = **50**

$M_{33} =$ artinya determinan matriks ordo 2x2 yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke 3 kolom ke 3 pada matrik ordo 3x3

M_{33}= $\begin{bmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{bmatrix}$ = $\begin{vmatrix} 50 & 75 \\ 30 & 45 \end{vmatrix}$ = 50(45) – 75(30) = 2.250 - 2.250 = **0**

Jadi Minor Matriks A = $\begin{bmatrix} \mathbf{100} & \mathbf{100} & \mathbf{60} \\ \mathbf{250} & \mathbf{220} & \mathbf{100} \\ \mathbf{75} & \mathbf{50} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$

Sehingga kofaktor matriks A adalah:

Kofaktor Matriks A baris pertama kolom pertama, berarti i = 1 dan j = 1.

K_{ij} = (-1) M^{i+j}. M_{ij}

K_{11} = (-1) M^{1+1}. M_{11}

K_{11} = $(-1)^2$. 100

K_{11} = (1) 100 = **100**

Kofaktor matriks A baris pertama kolom kedua, berarti i = 1 dan j = 2.

K_{12} = (-1) M^{1+2}. M_{12}

K_{12} = $(-1)^3$. M_{12}

K_{12} = (-1) . 100 = **-100**

Kofaktor matriks A baris pertama kolom ketiga, berarti i = 1 dan j = 3.

K_{13} = (-1) M^{1+3}. M_{13}

K_{13} = $(-1)^4$. M_{13}

K_{13} = (1) . 60 = **60**

Kofaktor matriks A baris kedua kolom pertama, berarti i = 2 dan j = 1

K_{21} = $(-1)^{2+1}$. M_{21}

K_{21} = $(-1)^3$. 250 = (- 1) 250 = **- 250**

Kofaktor matriks A baris kedua kolom kedua, berarti i = 2 dan j = 2

K_{22} = $(-1)^{2+2}$. M_{22}

K_{22} = $(-1)^4$ 220 = (1) 220= **220**

Kofaktor matriks A baris kedua kolom ketiga, berarti i = 2 dan j = 3
$K_{23} = (-1)^{2+3}. M_{23}$
K_{23} = $(-1)^5$100 = (-1) 100 = **- 100**

Kofaktor matriks A baris ketiga kolom pertama, berarti i = 3 dan j = 1
$K_{31} = (-1)^{3+1}. M_{31}$
K_{31} = $(-1)^{4\cdot}$75 = 1. 75 = **75**

Kofaktor matriks A baris ketiga kolom kedua, berarti i = 3 dan j = 2
$K_{32} = (-1)^{3+2}. M_{32}$
K_{22} = $(-1)^5$(50) = -1(50) = **- 50**

Kofaktor matriks A baris ketiga kolom ketiga, berarti i = 3 dan j = 3
$K_{33} = (-1)^{3+3}. M_{33}$
K_{33} = $(-1)^6$(0) = 1(0) = **50**

Jadi Kofaktor Matriks A = $\begin{bmatrix} \mathbf{100} & \mathbf{-100} & \mathbf{60} \\ \mathbf{-250} & \mathbf{220} & \mathbf{-100} \\ \mathbf{75} & \mathbf{-50} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$

Adjoin matriks A dicari dengan mencari transpose dari kofaktor matriks A, sehingga :

$$Adj\ A = \begin{bmatrix} 100 & -250 & 75 \\ -100 & 220 & -50 \\ 60 & -100 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks di atas, diperoleh invers dari matriks A adalah:

$\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{det\ A}}$ **Adj A**

Sehingga :

$\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{det\ A}}$ **Adj A=** $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{-100}}\begin{bmatrix} 100 & -250 & 75 \\ -100 & 220 & -50 \\ 60 & -100 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2,5 & -0,75 \\ 1 & -2,2 & 0,5 \\ -0,6 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Bentuk matriks permaslahan di atas adalah:

$\begin{bmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 305 \\ 185 \\ 206 \end{bmatrix}$

Bentuk tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan AX=B, untuk memperoleh matriks X, yang elemen-elemennya merupakan banyaknya pesawat Airbus100 (x), banyaknya pesawat Airbus 200 (y), dan banyaknya pesawat Airbus 300 (z), kita kalikan dengan matriks $\boldsymbol{A^{-1}}$ke ruas kiri dan ruas kanan persamaan AX=B, sehingga diperoleh:

$\boldsymbol{A^{-1}}$AX=$\boldsymbol{A^{-1}}$B
X = $\boldsymbol{A^{-1}}$**B**

X = $\begin{bmatrix} -1 & 2,5 & -0,75 \\ 1 & -2,2 & 0,5 \\ -0,6 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 305 \\ 185 \\ 206 \end{bmatrix}$

= $\begin{bmatrix} (-1)(305) + (2,5)(185) + (-0,75)(206) \\ (1)(305) + (-2,2)(185) + (0,5)(206) \\ (-0,6)(305) + (1)(185) + (0)(206) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -305 + 462,5 + (-154,5) \\ 305 + (-407) + 103 \\ (-183) + 185 + 0 \end{bmatrix}$

X = $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Hasil yang diperoleh dengan menerapkan metode (cara) Invers dan metode (cara) determinan, diperoleh hasil yang sama, yaitu banyaknya pesawat Airbus 100 yang disediakan sebanyak 3 unit, banyaknya pesawat Airbus 200 yang disediakan sebanyak 1 unit, dan banyaknya pesawat Airbus 300 yang disediakan sebanyak 2 unit.

Sifat-sifat Invers matriks

1. **Misalkan matriks A berordo n x n dengan n ∈ N, dan determinan A tidak sama dengan nol, jika A^{-1} adalah invers dari A, maka $(A^{-1})^{-1}$ = A**
2. **Misalkan matriks A dan B berordo n x n dengan n ∈ N, dan determinan A dan B tidak sama dengan nol, jika A^{-1} dan B^{-1}adalah invers dari matriks A dan B, maka $(AB)^{-1}$ = $B^{-1}A^{-1}$**

C. Rangkuman

1. Invers dari matriks A yang mempunyai ordo 2x2 A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ adalah

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{det\ A}} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

2. Invers dari matriks A yang mempunyai ordo 3x3 A = $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ adalah

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{det\ A}} \textbf{Adj A}$$

3. Mencari matriks X dalam bentuk persamaan Matriks:
   - A.X = B ↔ X = $\boldsymbol{A^{-1}}$ **B**
   - X.A = B ↔ X = **B** $\boldsymbol{A^{-1}}$

D. Latihan Soal

1. Diketahui matriks berordo 2x2 A = $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Carilah invers matirksnya (A^{-1})
2. Diketahui A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 6 & 9 & -10 \\ -3 & -2 & 7 \end{bmatrix}$, tentukan invers matriksnya (A^{-1})