KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
Rumus Jumlah dan Selisih Dua Sudut

A. Tujuan Pembelajaran

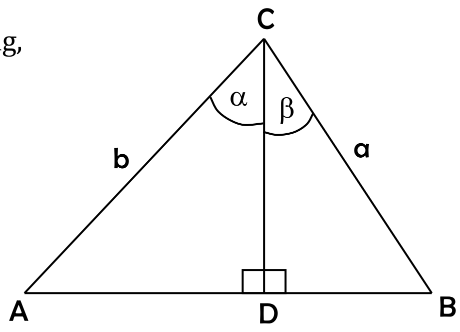
Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini diharapkan Ananda dapat menggunakan rumus jumlah dan selisih sinus, cosinus atau tangen untuk menentukan nilai dari sudut sinus, cosinus maupun tangen dan kebalikannya yang tidak istimewa dan dapat menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan hal tersebut.

B. Uraian Materi

Pada kegiatan pembelajaran pertama, kita akan mencari rumus Jumlah dan Selisih Dua Sudut dari sinus dan cosinus. Perhatikan penurunannya yaa...

1. Rumus untuk sin (α + β) dan sin (α – β)

Menemukan rumus sin (α + β) :
Coba Ananda perhatikan gambar ΔABC di samping,



dengan perbandingan trigonometri diperoleh :

$\frac{CD}{a} = \cos\ \beta$, sehingga CD = a . cos β .... (1)
$\frac{AD}{b} = \sin\ \alpha$, sehingga AD = b . sin α .... (2)
$\frac{CD}{b} = \cos\ \alpha$, sehingga CD = b . cos α .... (3)
$\frac{BD}{a} = \sin\ \beta$, sehingga BD = a . sin β .... (4)

Agar lebih mudah diingat:

$$\sin\theta = \frac{sisi\ depan\ sudut}{sisi\ miring}$$
$$\cos\theta = \frac{sisi\ samping\ sudut}{sisi\ miring}$$
$$\tan\theta = \frac{sisi\ depan\ sudut}{sisi\ samping\ sudut}$$

Dengan menggunakan persamaan (1) dan (2),

diperoleh :

Luas ΔADC = $\frac{1}{2}$. AD x CD = $\frac{1}{2}$. b.sin α . a.cos β = $\frac{1}{2}$ab. sin α cos β ... (5)
Dengan menggunakan persamaan (3) dan (4), diperoleh :
Luas ΔBDC = $\frac{1}{2}$. BD x CD = $\frac{1}{2}$. a.sin β x b.cos α = $\frac{1}{2}$ab. cos α sin β ... (6)
Dari persamaan (5) dan (6) diperoleh Luas ΔABC adalah :

Luas ΔABC = Luas ΔADC + Luas ΔBDC
= $\frac{1}{2}$ab. sin α cos β + $\frac{1}{2}$ab. cos α sin β
= $\frac{1}{2}$ab (sin α cos β + cos α sin β) .... (7)

Dengan menggunakan rumus umum luas segitiga, diperoleh Luas ΔABC :

$$\text{Luas } \Delta ABC = \frac{1}{2} a.b.\sin(\alpha+\beta) \quad \text{............. } (8)$$

Dari persamaan (7) dan (8) diperoleh kesamaan :

$$\frac{1}{2} a.b.\sin(\alpha+\beta) = \frac{1}{2} ab(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$$

Atau :

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}$$

Persamaan di atas merupakan ***rumus sinus jumlah dua sudut***. Adapun rumus sinus selisih dua sudut dapat diperoleh dengan mensubstitusikan $-\beta$ ke dalam β, sehingga diperoleh :

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha+(-\beta)) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta)$$

Karena $\cos(-\beta) = \cos\beta$ dan $\sin(-\beta) = -\sin\beta$, maka :

$$\boxed{\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}$$

Contoh Soal

1. Tanpa menggunakan kalkulator atau tabel trigonometri, hitunglah nilai :
   a. $\sin 75°$
   b. $\sin 15°$

   ***Penyelesaian* :**

   a. $\sin 75° = \sin(45°+30°) = \sin 45°\cos 30° + \cos 45° \text{ ain } 30°$

   $$= \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) + \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{4}\sqrt{2} = \frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$$

   b. $\sin 15° = \sin(45°-30°) = \sin 45°\cos 30° - \cos 45°\sin 30°$

   $$= \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) - \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2} = \frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$

2. Hitunglah nilai dari $\sin 43°\cos 13° - \cos 43°\sin 13°$!

   Penyelesaian :

   $\sin 43°\cos 13° - \cos 43°\sin 13° = \sin(43°-13°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$

3. Diketahui $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ dan $\cos\beta = \frac{5}{13}$ (α dan β sudut lancip).
   Tentukan nilai $\sin(\alpha+\beta)$!

   Penyelesaian :

   $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
   $\sin\alpha$ dan $\cos\beta$ telah diketahui, sehingga kita perlu menentukan $\cos\alpha$ dan $\sin\beta$ terlebih dahulu.
   Dari Identitas $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, maka $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ atau $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$.

   $\cos\alpha = +\sqrt{1-\sin^2\alpha}$ .... ($\cos\alpha$ positif untuk α lancip)

   $$= +\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

sin β $= +\sqrt{1-cos^2\beta}$ .... (sin β positif untuk β lancip)

$= +\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{25}{169}} = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$

Jadi, sin (α + β) = sin α cos β + cos α sin β $= \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{12}{13}\right) = \frac{20}{65} + \frac{36}{65} = \frac{56}{65}$.

4. Rumus untuk cos (α + β) dan cos (α – β)

Dengan menggunakan rumus sudut berelasi (pelajaran Trigonometri di kelas X), kita dapat menemukan rumus cosinus jumlah dua sudut sebagai berikut.

cos α = sin (90° - α) , sehingga cos (α + β) = sin (90° – (α + β))
= sin ((90° – α) – β)
= sin (90° – α) cos β – cos (90° – α)sinβ
= cos α cos β – sin α sin β

Jadi, **cos (α + β) = cos α cos β – sin α sin β**

Rumus cosinus selisih dua sudut dapat diperoleh dengan mensubstitusikan –β ke dalam β pada rumus di atas, sehingga diperoleh :

cos (α + (–β)) = cos α cos (–β) – sin α sin (–β)

Karena cos (–β) = cos β dan sin (–β) = – sin β , maka :

cos (α – β) = cos α cos β + sin α sin β

Contoh Soal

1) Tanpa menggunakan kalkulator atau tabel trigonometri, hitunglah nilai :
   a. cos 75° b. cos 15°

   Penyelesaian **:**

   a. cos 75° = cos (45° + 30°) = cos 45° cos 30° – sin 45° sin 30°

   $= \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) - \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$

   b. cos 15° = cos (45° – 30°) = cos 45° cos 30° + sin 45° sin 30°

   $= \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) + \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{4}\sqrt{2} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)$

2) Hitunglah nilai dari cos 105° cos 75° + sin 105° sin 75° !

   Penyelesaian **:**

   cos 105° cos 75° + sin 105° sin 75° = cos (105° – 75°) = cos 30°= $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

3) Diketahui cos α = $\frac{3}{5}$ dan cos β = $\frac{12}{13}$ (α dan β sudut lancip).

   Tentukan nilai cos (α + β) !

   Penyelesaian :

   cos (α + β) = cos α cos β – sin α sin β

   cos α dan cos β telah diketahui, sehingga kita perlu menentukan sin α dan sin β terlebih dahulu.

   Dari Identitas $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, maka $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

   sin α $= +\sqrt{1-cos^2\alpha}$ .... (sin α positif untuk α lancip)

$= +\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$

sin β $= +\sqrt{1-cos^2\beta}$ .... (sin β positif untuk β lancip)

$= +\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{144}{169}} = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}$

Jadi, cos (α + β) = cos α cos β – sin α sin β = $\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{12}{13}\right)-\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right) = \frac{36}{65}-\frac{20}{65} = \frac{16}{65}$.

5. Rumus untuk tan (α + β) dan tan (α – β)

***Menemukan rumus untuk* tan (α + β) *dan* tan (α – β)**

Dengan menggunakan rumus sinus dan kosinus untuk jumlah dan selisih dua sudut, tunjukkan bahwa :

$$tan\ \ (\alpha+\beta) = \frac{tan\,\alpha + tan\,\beta}{1-tan\,\alpha\ \ tan\,\beta}$$

dan

$$tan\ \ (\alpha-\beta) = \frac{tan\,\alpha - tan\,\beta}{1+tan\,\alpha\ \ tan\,\beta}$$

Contoh Soal

1. Tanpa menggunakan kalkulator atau tabel trigonometri, hitunglah nilai :
   a. tan 75° b. tan 15°

   ***Penyelesaian* :**

   a. tan 75° = tan (45° + 30°) = $\frac{tan\,45^o + tan\,30^o}{1-tan\,45^o\ \ tan\,30^o} = \frac{1+\frac{1}{3}\sqrt{3}}{1-(1)\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)} = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$ x $\frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$

   $$= \frac{9+6\sqrt{3}+3}{9-3} = \frac{12+6\sqrt{3}}{6} = 2+\sqrt{3}$$

   b. tan 15° = tan (45° – 30°) = $\frac{tan\,45^o - tan\,30^o}{1+tan\,45^o\ \ tan\,30^o} = \frac{1-\frac{1}{3}\sqrt{3}}{1+(1)\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)} = \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$ x $\frac{3-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$

   $$= \frac{9-6\sqrt{3}+3}{9-3} = \frac{12-6\sqrt{3}}{6} = 2-\sqrt{3}$$

2. Diketahui cos A = $\frac{4}{5}$ dan sin B = $-\frac{15}{17}$, dengan A sudut di kuadran I dan B sudut di kuadran III. Tentukan nilai dari :
   tan (A – B)

   ***Penyelesaian* :**

   Untuk A di kuadran I, tan A = $\frac{y}{x}$ dengan x bernilai positif dan y bernilai positif.

   cos A = $\frac{4}{5}$, artinya x = 4, r = 5, dan y = $+\sqrt{5^2-4^2} = \sqrt{9} = 3$, Sehingga tan A = $\frac{3}{4}$.

   Untuk B di kuadran III, tan B = $\frac{y}{x}$ dengan x bernilai negatif dan y bernilai negatif.

   sin B = $-\frac{15}{17}$, artinya y = –15, r = 17, dan x = $-\sqrt{17^2-(-15)^2} = -\sqrt{64} = -8$,

   Sehingga tan B = $\frac{-15}{-8} = \frac{15}{8}$.

   Jadi tan (A – B) = $\frac{tan\,A\ -\ tan\,B}{1+tan\,A\ \ tan\,B} = \frac{\frac{3}{4}-\frac{15}{8}}{1+\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{15}{8}\right)} = \frac{\frac{24-60}{32}}{\frac{32+45}{32}} = \frac{-36}{77} = -\frac{36}{77}$

Identitas Trigonometri Dasar

Nah ini catatan rumus biar Ananda ingat yaa

- $\csc\,\alpha = \frac{1}{sin\,\alpha}$
- $\sec\alpha = \frac{1}{cos\,\alpha}$
- $\cot\alpha = \frac{1}{tan\,\alpha}$
- $\tan\alpha = \frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha}$ dan $\cot\alpha = \frac{cos\,\alpha}{sin\,\alpha}$
- $sin^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1$
- $1 + tan^2\,\alpha = sec^2\,\alpha$
- $1 + \cot^2\,\alpha\; = \csc^2\,\alpha$

C. Rangkuman

Berikut adalah rumus-rumus jumlah dan selisih dua sudut:

1. $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
2. $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
3. $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
4. $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
5. $tan\ (\alpha + \beta) = \frac{tan\,\alpha + tan\,\beta}{1 - tan\,\alpha\ tan\,\beta}$
6. $tan\ (\alpha - \beta) = \frac{tan\,\alpha - tan\,\beta}{1 + tan\,\alpha\ tan\,\beta}$
7. Identitas Dasar:

- $\csc\alpha = \frac{1}{sin\,\alpha}$
- $\sec\alpha = \frac{1}{cos\,\alpha}$
- $\cot\alpha = \frac{1}{tan\,\alpha}$
- $\tan\alpha = \frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha}$ dan $\cot\alpha = \frac{cos\,\alpha}{sin\,\alpha}$
- $sin^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1$
- $1 + tan^2\,\alpha = sec^2\,\alpha$
- $1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$

D. Latihan Soal

Kerjakan soal-soal berikut ini dengan tepat dan benar.

1. Tanpa menggunakan kalkulator atau tabel trigonometri, hitunglah nilai :
   a. sin 105°
   b. sin 195°

2. Hitunglah nilai dari sin 42° cos 18° + cos 42° sin 18° !

3. Diketahui sin $\alpha = \frac{4}{5}$ dan cos $\beta = \frac{5}{13}$ (α dan β sudut lancip).
   Tentukan nilai sin (α - β) !

6. Tanpa menggunakan kalkulator atau tabel trigonometri, hitunglah nilai :
   b. cos 105° b. cos 195°

7. Hitunglah nilai dari cos 195° cos 75° + sin 195° sin 75° !

8. Diketahui cos $\alpha = \frac{3}{5}$ dan cos $\beta = \frac{12}{13}$ (α dan β sudut lancip).
   Tentukan nilai cos (α - β) !

9. Buktikan identitas : $\frac{cos(A+B)}{cos\, A.cos\, B} = 1 - tan\, A\, .\, tan\, B$

10. Tanpa menggunakan kalkulator atau tabel trigonometri, hitunglah nilai :
    a. tan 105° b. tan 165°

11. Diketahui cos A = $\frac{4}{5}$ dan sin B = $-\frac{15}{17}$, dengan A sudut di kuadran I dan B sudut di kuadran III. Tentukan nilai dari :
    tan (A + B)

12. Buktikan identitas : $tan(\frac{\pi}{2} + x) = -cotan\ \ x$

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2
Rumus Trigonometri Sudut Rangkap

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 2 ini diharapkan Ananda dapat menggunakan rumus trigonometri sudut rangkap dan dapat menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan rumus tersebut.

B. Uraian Materi

1. Rumus Trigonometri Sudut Rangkap (Ganda)

Sudut ganda dari α dinyatakan dengan 2α. Rumus trigonometri sudut rangkap dapat diperoleh dengan menggunakan rumus trigonometri jumlah dua sudut.

- Rumus sinus sudut rangkap

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= \sin(\alpha + \alpha) \\ &= \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha \\ &= 2\sin\alpha\cos\alpha\end{aligned}$$

- Rumus kosinus sudut rangkap

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos(\alpha + \alpha) \\ &= \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha \\ &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\end{aligned}$$

dengan menggunakan identitas $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, kita dapat menemukan bentuk lain untuk $\cos 2\alpha$:

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ &= \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) \\ &= 2\cos^2\alpha - 1\end{aligned}$$

Atau :

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ &= (1 - \sin^2\alpha) - \sin^2\alpha \\ &= 1 - 2\sin^2\alpha\end{aligned}$$

- Rumus tangen sudut rangkap

$$\begin{aligned}\tan 2\alpha &= \tan(\alpha + \alpha) \\ &= \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha\ \tan\alpha} \\ &= \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}\end{aligned}$$

Contoh Soal

1. Sederhanakan bentuk – bentuk di bawah ini !

   a. $2\sin 22{,}5° \cos 22{,}5°$

   b. $2\cos^2 67{,}5° - 1$

   c. $2\sin 3A\cos 3A$

   d. $1 - 2\sin^2 5A$

   e. $\cos^2 3A - \sin^2 3A$

   f. $\frac{2\tan 3\alpha}{1 - \tan^2 3\alpha}$

   Penyelesaian :

   a. $2\sin 22{,}5° \cos 22{,}5° = \sin 2(22{,}5°) = \sin 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

   b. $2\cos^2 67{,}5° - 1 = \cos 2(67{,}5°) = \cos 135° = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

c. $2 \sin 3A \cos 3A = \sin 2(3A) = \sin 6A$

d. $1 - 2 \sin^2 5A = \cos 2(5A) = \cos 10A$

e. $\cos^2 3A - \sin^2 3A = \cos 2(3A) = \cos 6A$

f. $\frac{2 \tan 3\alpha}{1-\tan^2 3\alpha} = \tan 2(3\alpha) = \tan 6\alpha$

2. Diketahui $\sin A = \frac{5}{13}$, dengan A lancip. Hitung nilai $\sin 2A$, $\cos 2A$, dan $\tan 2A$!

Penyelesaian :

$\sin A = \frac{5}{13}$, maka $\cos A = +\sqrt{1-\sin^2 A} = +\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{25}{169}} = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$

Sehingga :

$\sin 2A = 2 \sin A \cos A = 2\left(\frac{5}{13}\right)\left(\frac{12}{13}\right) = \frac{120}{169}$

$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = \left(\frac{12}{13}\right)^2 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169} - \frac{25}{169} = \frac{119}{169}$

$\tan 2A = \frac{\sin 2A}{\cos 2A} = \frac{\frac{120}{169}}{\frac{119}{169}} = \frac{120}{119}$

3. Tunjukkan bahwa :

$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1 + \sin 2\theta$

Penyelesaian :

$$\begin{aligned}(\sin\theta + \cos\theta)^2 &= \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta \\ &= (\sin^2\theta + \cos^2\theta) + 2\sin\theta\cos\theta \\ &= 1 + 2\sin\theta\end{aligned}$$

2. Rumus Trigonometri untuk Setengah Sudut

Dari rumus trigonometri sudut ganda, dapat diturunkan rumus trigonometri untuk setengah sudut, yaitu dengan menetapkan $\frac{1}{2}\alpha$ sebagai sudut tunggal dan α sebagai sudut ganda.

- $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

  Misalkan $2\theta = \alpha$ dan $\theta = \frac{\alpha}{2}$, maka : $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$

  $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}$

- $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

  Misalkan $2\theta = \alpha$ dan $\theta = \frac{\alpha}{2}$, maka : $\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$

  $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}$

- $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}}$

- Dengan mengalikan ruas kanan pada rumus tangen setengah sudut dengan $\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$, diperoleh :

  $\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \mathbf{x} \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\sqrt{(1+\cos\alpha)^2}} = \frac{\sqrt{\sin^2\alpha}}{1+\cos\alpha}$

$$\boxed{\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

- Dengan mengalikan ruas kanan pada rumus tangen setengah sudut dengan $\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$, diperoleh :

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \times \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{\sqrt{(1-\cos\alpha)^2}}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha}}$$

$$\boxed{\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}}$$

Contoh Soal

Tanpa menggunakan tabel trigonometri atau kalkulator, hitunglah :
a. sin 22,5°
b. cos 165°
c. tan 67,5°

Penyelesaian :
a. $22{,}5° = \frac{1}{2}(45°)$.

$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$, maka : $\sin 22{,}5° = +\sqrt{\frac{1-\cos 45^o}{2}}$ .... (+) karena di kuadran I

$$= \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

b. $165° = \frac{1}{2}(330°)$,

$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$, maka : $\cos 165° = -\sqrt{\frac{1+\cos 330^o}{2}}$ ...... (−) karena di kuadran II

$$= -\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

c. $67{,}5° = \frac{1}{2}(135°)$, dengan menggunakan : $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$,

maka : $\tan 67{,}5° = \frac{\sin 135^o}{1+\cos 135^o} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{1+\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \times \frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}+2}{4-2} = \frac{2\sqrt{2}+2}{2} = \sqrt{2}+1$$

C. Rangkuman

Rumus Trigonometri Sudut Ganda:

- $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
- $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$
- $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$
- $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$
- $\tan 2\alpha = \dfrac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$

Rumus Trigonometri Sudut Tengahan:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

D. Latihan Soal

1. Sederhanakan bentuk – bentuk di bawah ini !
   a. $1 - 2\sin^2 5A$
   b. $\cos 2\ 3A - \sin 2\ 3A$
   c. $\frac{2\tan 3\alpha}{1-\tan^2 3\alpha}$

2. Diketahui $\sin A = \frac{3}{5}$, dengan A lancip. Hitung nilai sin 2A, cos 2A, dan tan 2A !

3. Jika tan A = 3 dan A di kuadran III, hitunglah nilai sin 2A, cos 2A, dan tan 2A.

4. Tunjukkan bahwa :
   a. $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1 + \sin 2\theta$
   b. $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$ (petunjuk : nyatakan bahwa 3A = 2A + A)
   c. $\frac{\cos^4\alpha - \sin^4\alpha}{1-\tan^4\alpha} = \cos^4\alpha$

5. Jika $\tan\frac{1}{2}A = \frac{1}{2}$, A sudut lancip, hitunglah tan A dan tan 2A !

KEGIATAN PEMBELAJARAN 3

Rumus Perkalian, Penjumlahan dan Pengurangan sinus dan cosinus

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 3 ini diharapkan Ananda dapat menurunkan dan menggunakan rumus perkalian, penjumlahan maupun pengurangan dari sinus dan kosinus dan dapat menyelesaikan amsalah yang berkaitan dengan rumus tersebut.

B. Uraian Materi

1. Rumus Konversi Perkalian ke Penjumlahan atau Pengurangan

Pada pembelajaran pertama telah dipelajari rumus fungsi trigonometri untuk jumlah dan selisih dua sudut. Pada bagian ini, kita akan menggunakan rumus-rumus tersebut untuk menemukan rumus konversi perkalian ke penjumlahan atau pengurangan dan sebaliknya.

- **Rumus perkalian sinus dan kosinus**

$$\begin{array}{lcl} \sin(\alpha+\beta) & = & \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha-\beta) & = & \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\ \hline \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) & = & 2\sin\alpha\cos\beta \end{array} \quad +$$

Jadi,

$$\boxed{2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}$$

Atau

$$\boxed{\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]}$$

$$\begin{array}{lcl} \sin(\alpha+\beta) & = & \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha-\beta) & = & \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\ \hline \sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta) & = & 2\cos\alpha\sin\beta \end{array} \quad -$$

Jadi,

$$\boxed{2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}$$

atau

$$\boxed{\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]}$$

- **Rumus perkalian kosinus dan kosinus**

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \quad + \\ \hline \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) &= 2\cos\alpha\cos\beta \end{aligned}$$

Jadi,

$$\boxed{2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}$$

atau

$$\boxed{\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]}$$

- **Rumus perkalian sinus dan sinus**

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \quad - \\ \hline \cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta) &= -2\sin\alpha\sin\beta \end{aligned}$$

Jadi,

$$\boxed{-2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}$$

atau

$$\boxed{\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]}$$

Contoh Soal

1. Nyatakan bentuk perkalian berikut sebagai penjumlahan/pengurangan
   a. $4\cos 2x\cos 3x$
   b. $3\sin 4x\sin 6x$
   Penyelesaian :

   a. $4\cos 2x\cos 3x = 2(2\cos 2x\cos 3x) = 2[\cos(2x+3x)+\cos(2x-3x)]$
   $= 2[\cos 5x + \cos(-x)] = 2\cos 5x + 2\cos x$

   b. $3\sin 4x\sin 6x = -\frac{3}{2}(-2\sin 4x\sin 6x) = -\frac{3}{2}[\cos(4x+6x)-\cos(4x-6x)]$
   $= -\frac{3}{2}[\cos 10x - \cos(-2x)] = -\frac{3}{2}\cos 10x + \frac{3}{2}\cos 2x$

2. Tanpa menggunakan kalkulator, hitunglah nilai eksak dari :
   a. $\cos 52{,}5^\circ \sin 7{,}5^\circ$
   b. $2\sin 127{,}5^\circ \sin 97{,}5^\circ$
   Penyelesaian :

   a. $\cos 52{,}5^\circ\sin 7{,}5^\circ = \frac{1}{2}[\sin(52{,}5^\circ+7{,}5^\circ)-\sin(52{,}5^\circ-7{,}5^\circ)] = \frac{1}{2}(\sin 60^\circ - \sin 45^\circ)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$

b. $2 \sin 127{,}5° \sin 97{,}5° = -[\cos(127{,}5° + 97{,}5°) - \cos(127{,}5° - 97{,}5°)]$

$= -(\cos 225° - \cos 30°) = -\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)$

2. Rumus Konversi Penjumlahan atau Pengurangan ke Perkalian

Untuk menemukan rumus konversi penjumlahan/pengurangan ke perkalian, maka perhatikan rumus konversi perkalian ke penjumlahan/pengurangan pada bagian pertama :

- $2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$
- $2 \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$
- $2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$
- $-2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)$

Misalkan $P = \alpha + \beta$ dan $Q = \alpha - \beta$

Maka diperoleh :

$P + Q = (\alpha + \beta) + (\alpha - \beta) = 2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}(P + Q)$

dan $P - Q = (\alpha + \beta) - (\alpha - \beta) = 2\beta \Rightarrow \beta = \frac{1}{2}(P - Q)$

Jika kita substitusikan pemisalan di atas pada rumus konversi perkalian ke penjumlahan atau pengurangan, maka diperoleh rumus konversi penjumlahan/pengurangan ke perkalian sebagai berikut :

- $\sin P + \sin Q = 2 \sin \frac{1}{2}(P + Q) \cos \frac{1}{2}(P - Q)$
- $\sin P - \sin Q = 2 \cos \frac{1}{2}(P + Q) \sin \frac{1}{2}(P - Q)$
- $\cos P + \cos Q = 2 \cos \frac{1}{2}(P + Q) \cos \frac{1}{2}(P - Q)$
- $\cos P - \cos Q = -2 \sin \frac{1}{2}(P + Q) \sin \frac{1}{2}(P - Q)$

Contoh Soal

1. Ubahlah setiap bentuk di bawah ini ke dalam bentuk perkalian !

   a. $\cos 3P + \cos 7P$
   b. $\sin 8x - \sin 2x$

   Penyelesaian :

   a. $\cos 3P + \cos 7P = 2 \cos \frac{1}{2}(3P + 7P) \cos \frac{1}{2}(3P - 7P)$

   $= 2 \cos 5P \cos(-2P) = 2 \cos 5P \cos 2P$

   b. $\sin 8x - \sin 2x = 2 \cos \frac{1}{2}(8x + 2x) \sin \frac{1}{2}(8x - 2x) = 2 \cos 5x \sin 3x$

2. Tanpa menggunakan kalkulator, hitunglah nilai eksak dari :

   a. $\sin 15° + \sin 75°$
   b. $\cos 195° - \cos 105°$

   Penyelesaian :

   a. $\sin 15° + \sin 75° = 2 \sin \frac{1}{2}(15° + 75°) \cos \frac{1}{2}(15° - 75°) = 2 \sin 45° \cos(-30°)$

   $= 2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{6}$

b. $\cos 195° - \cos 105° = -2 \sin \frac{1}{2}(195° + 105°) \sin \frac{1}{2}(195° - 105°) = -2 \sin 150°$
$\sin 45°$

$$= -2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

3. Identitas Trigonometri

Langkah – langkah yang dapat digunakan untuk membuktikan suatu identitas trigonometri atau persamaan trigonometri :

1) Selesaikan salah satu ruas (pilih ruas yang bentuknya kompleks/tidak sederhana)
2) Pergunakan operasi aljabar yang sesuai dan rumus – rumus trigonometri yang telah dipelajari sebelumnya.
3) Samakan hasilnya dengan ruas yang lain.

Contoh Soal

1. Buktikan identitas di bawah ini :

a. $\frac{\cos x + \cos y}{\sin x - \sin y} = \cot\left(\frac{x-y}{2}\right)$

b. $\sin(45° + x) - \sin(45° - x) = \sqrt{2}\ \sin x$

Penyelesaian **:**

a. Ruas kiri $= \frac{\cos x + \cos y}{\sin x - \sin y}$

$$= \frac{2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}$$

$= \cot\left(\frac{x-y}{2}\right)$ = Ruas kanan (terbukti)

b. Ruas kiri $= \sin(45° + x) - \sin(45° - x)$

$$= 2\cos\left(\frac{(45^o+x)+(45^o-x)}{2}\right)\sin\left(\frac{(45^o+x)-(45^o-x)}{2}\right)$$

$$= 2\cos\left(\frac{90^o}{2}\right)\sin\left(\frac{2x}{2}\right)$$

$$= 2\cos 45^o \sin x$$

$$= 2.\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right).\sin x$$

$= \sqrt{2}\ \sin x$ = Ruas kanan (terbukti)

2. Misalkan $P + Q + R = 180^o$, buktikan bahwa $\sin 2P + \sin 2Q + \sin 2R = 4 \sin P . \sin Q . \sin R$!

Penyelesaian **:**

Ruas kiri = sin 2P + sin 2Q + sin 2R

= (sin 2P + sin 2Q) + sin 2R

= $2\,sin\left(\frac{2P+2Q}{2}\right) cos\left(\frac{2P-2Q}{2}\right)$ + sin 2R

= 2 sin (P + Q) cos (P – Q) + 2 sin R cos R

= 2 sin R cos (P – Q) + 2 sin R cos R

= 2 sin R (cos (P – Q) + cos R)

= 2 sin R (cos (P – Q) – cos (P + Q))

= 2 sin R $\left(-2\,sin\left(\frac{(P-Q)+(P+Q)}{2}\right) sin\left(\frac{(P-Q)-(P+Q)}{2}\right)\right)$

= 2 sin R $\left(-2\,sin\left(\frac{2P}{2}\right) sin\left(\frac{-2Q}{2}\right)\right)$

= 2 sin R (2 sin P sin Q)

= 4 sin P sin Q sin R

= Ruas kanan (terbukti)

Catatan :
P + Q + R = 180°
R = 180° – (P + Q)
P + Q = 180° – R
sin (P + Q) = sin (180° – R)
= sin R
cos R = cos (180° – (P + Q))
= – cos (P + Q)

C. Rangkuman

Rumus-rumus di atas dapat kita rangkum sebagai berikut:

1. $2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$

2. $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$

3. $2 \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$

4. $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$

5. $2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$

6. $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$

7. $-2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)$

8. $\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$

9. $\sin P + \sin Q = 2 \sin \frac{1}{2}(P + Q) \cos \frac{1}{2}(P - Q)$

10. $\sin P - \sin Q = 2 \cos \frac{1}{2}(P + Q) \sin \frac{1}{2}(P - Q)$

11. $\cos P + \cos Q = 2 \cos \frac{1}{2}(P + Q) \cos \frac{1}{2}(P - Q)$

12. $\cos P - \cos Q = -2 \sin \frac{1}{2}(P + Q) \sin \frac{1}{2}(P - Q)$

D. Latihan Soal

Kerjakan soal latihan ini yaa...

1. Nyatakan bentuk perkalian berikut sebagai penjumlahan/pengurangan !
   a. $2 \sin 3x \cos 2x$
   b. $\cos x \sin 5x$

2. Tanpa menggunakan kalkulator, hitunglah nilai eksak dari :
   a. $\sin 75° \cos 15°$
   b. $3 \cos 105° \cos 15°$

3. Buktikan identitas $\sin(A + B) \sin (A - B) = \sin^2 A - \sin^2 B$

4. Hitunglah nilai dari $\sin 10° \sin 50° \sin 70°$!

5. Ubahlah setiap bentuk di bawah ini ke dalam bentuk perkalian !
   a. $\sin 3A + \sin A$
   b. $\cos 6x - \cos 2x$

6. Tanpa menggunakan kalkulator, hitunglah nilai eksak dari :
   $\frac{\sin 75^o - \sin 15^o}{\cos 75^o + \cos 15^o}$

7. Buktikan bahwa :
   a. $\frac{\sin 5x + \sin 3x}{\cos 5x + \cos 3x} = \tan 4\, x$
   b. $\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha = \cos 2\alpha\, (1 + 2 \cos \alpha)$