

KEGIATAN PEMBELAJARAN 1

Persamaan Trigonometri Dasar

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari materi ini, diharapkan Ananda dapat menentukan himpunan penyelesaian persamaan trigonometri dasar

B. Uraian Materi

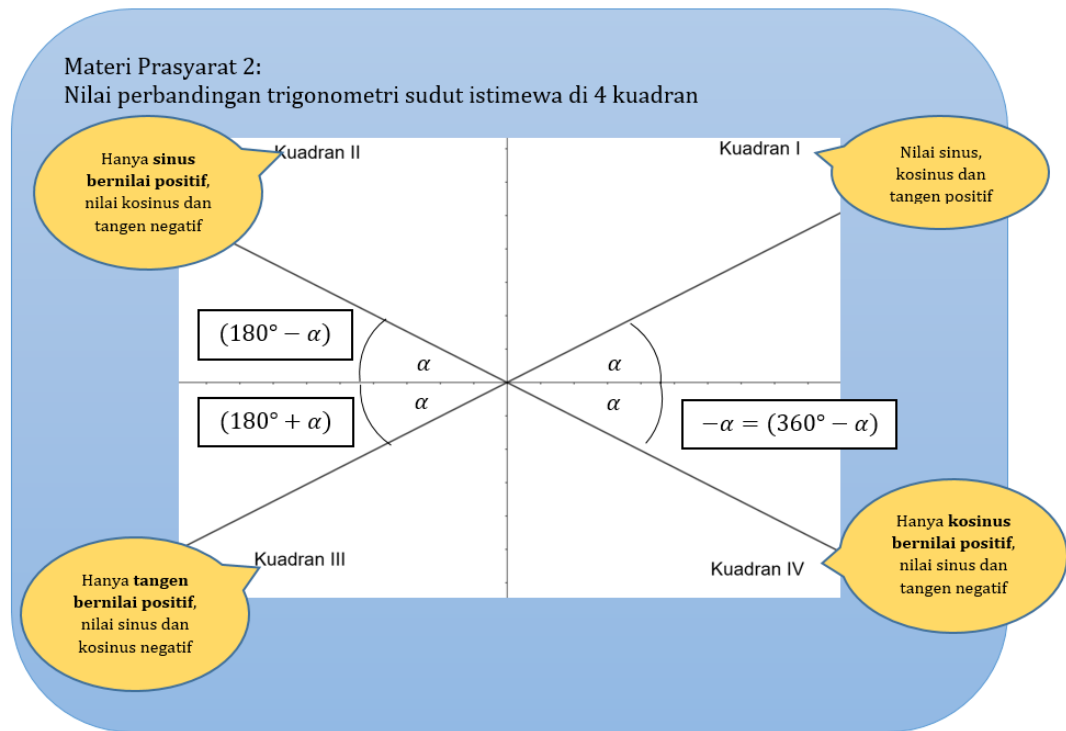
Jika ananda menyelesaikan suatu persamaan trigonometri, berarti ananda diharuskan menemukan nilai x , dalam satuan radian maupun derajat, yang memenuhi persamaan tersebut.

Sebelum memasuki materi, ada materi prasyarat yang harus ananda kuasai yaitu sebagai berikut.

Materi Prasyarat 1:

Nilai perbandingan trigonometri untuk sudut istimewa

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$ $= \frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	~



Untuk memeriksa kesiapan kalian memasuki materi ini, kerjakanlah soal berikut.

Tentukanlah nilai perbandingan trigonometri berikut.

- | | |
|-----------------------|------------------------|
| 1. $\sin 60^\circ =$ | 6. $\cos 300^\circ =$ |
| 2. $\cos 45^\circ =$ | 7. $\sin 120^\circ =$ |
| 3. $\tan 30^\circ =$ | 8. $\sin 240^\circ =$ |
| 4. $\cos 135^\circ =$ | 9. $\sin 310^\circ =$ |
| 5. $\cos 210^\circ =$ | 10. $\tan 315^\circ =$ |

Persamaan Trigonometri Dasar

Persamaan trigonometri dasar meliputi:

- $\sin x = \sin \alpha$
- $\cos x = \cos \alpha$
- $\tan x = \tan \alpha$
- $\sin x = k$, k sebuah konstanta
- $\cos x = k$, k sebuah konstanta
- $\tan x = k$, k sebuah konstanta

Penyelesaian persamaan trigonometri dasar

Menyelesaikan persamaan trigonometri dalam bentuk kalimat terbuka yang memuat variabel berarti menentukan nilai variabel yang terdapat dalam persamaan tersebut sehingga persamaan itu menjadi benar.

Untuk menyelesaikan persamaan trigonometri $\sin x = \sin \alpha$, $\cos x = \cos \alpha$ dan $\tan x = \tan \alpha$, perhatikan tanda (positif atau negatif) untuk $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ pada tiap kuadran dan sudut berelasi pada kuadran masing-masing.

Menentukan penyelesaian persamaan trigonometri dasar

a. $\sin x = \sin \alpha^\circ$

Nilai sinus suatu sudut positif di kuadran 1 dan 2 sehingga untuk persamaan $\sin x = \sin \alpha^\circ$ penyelesaiannya adalah:

$$x = \begin{cases} \alpha^\circ + k. 360^\circ & \text{--- (Kuadran 1)} \\ (180 - \alpha)^\circ + k. 360^\circ & \text{--- (Kuadran 2)} \end{cases}$$

b. $\cos x = \cos \alpha^\circ$

Nilai cosinus suatu sudut positif di kuadran 1 dan 4 sehingga untuk persamaan $\cos x = \cos \alpha^\circ$ penyelesaiannya adalah:

$$x = \begin{cases} \alpha^\circ + k. 360^\circ & \text{--- (Kuadran 1)} \\ (-\alpha)^\circ + k. 360^\circ & \text{--- (Kuadran 4)} \end{cases}$$

c. $\tan x = \tan \alpha^\circ$

Nilai tangen suatu sudut positif di kuadran 1 dan 3 sehingga untuk persamaan $\cos x = \cos \alpha^\circ$ penyelesaiannya adalah:

$$x = \alpha^\circ + k. 180^\circ \text{--- (Kuadran 1 dan 3)}$$

Begitu pula untuk bentuk sudut dalam radian.

a. $\sin x = \sin \alpha$

$$x = \begin{cases} \alpha + k. 2\pi & \text{--- (Kuadran 1)} \\ (\pi - \alpha) + k. 2\pi & \text{--- (Kuadran 2)} \end{cases}$$

b. $\cos x = \cos \alpha$

$$x = \begin{cases} \alpha + k. 2\pi & \text{--- (Kuadran 1)} \\ (-\alpha) + k. 2\pi & \text{--- (Kuadran 4)} \end{cases}$$

c. $\tan x = \tan \alpha$

$$x = \alpha + k. \pi \text{--- (Kuadran 1 dan 3)}$$

Agar lebih jelas, coba Ananda simak contoh berikut.

Contoh 1:

Tentukan akar-akar dari persamaan trigonometri berikut kemudian tuliskan himpunan penyelesaiannya.

1. $\sin x = \sin 70^\circ, 0^\circ \leq x \leq 360^\circ$
2. $\cos x = \cos 60^\circ, 0^\circ \leq x \leq 360^\circ$
3. $\tan x = \tan 20^\circ, 0^\circ \leq x \leq 360^\circ$
4. $\sin 2x = \sin \frac{2}{3}\pi, 0 \leq x \leq 2\pi$
5. $\cos 3x = \cos \frac{1}{2}\pi, 0 \leq x \leq \pi$
6. $\tan 2x - \tan \frac{1}{3}\pi = 0, 0 \leq x \leq 2\pi$

Alternatif penyelesaian:

1. $\sin x = \sin 70^\circ, 0^\circ \leq x \leq 360^\circ$

$$x_1 = 70^\circ$$

$$x_2 = (180 - 70)^\circ = 110^\circ$$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $\{70^\circ, 110^\circ\}$

2. $\cos x = \cos 60^\circ, 0^\circ \leq x \leq 360^\circ$

$$x_1 = 60^\circ$$

$$x_2 = -60^\circ + 360^\circ = 300^\circ$$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $\{60^\circ, 300^\circ\}$

3. $\tan x = \tan 20^\circ, 0^\circ \leq x \leq 360^\circ$

$$x = 20^\circ + k \cdot 180^\circ$$

Untuk $k = 0$ diperoleh $x_1 = 20^\circ$

Untuk $k = 1$ diperoleh $x_2 = 20^\circ + 180^\circ = 200^\circ$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $\{20^\circ, 200^\circ\}$

4. $\sin 2x = \sin \frac{2}{3}\pi, 0 \leq x \leq 2\pi$

a. $2x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

$$x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$$

untuk $k = 0$ diperoleh $x_1 = \frac{1}{3}\pi$

untuk $k = 1$ diperoleh $x_2 = \frac{1}{3}\pi + \pi = \frac{4}{3}\pi$

b. $2x = \left(\pi - \frac{2}{3}\pi\right) + k \cdot 2\pi$

$$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$$

untuk $k = 0$ diperoleh $x_3 = \frac{1}{6}\pi$

untuk $k = 1$ diperoleh $x_4 = \frac{7}{6}\pi$

Dari pengerjaan di atas diperoleh himpunan penyelesaiannya yaitu

$$\left\{\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{4}{3}\pi\right\}$$

5. $\cos 3x = \cos \frac{1}{2}\pi, 0 \leq x \leq \pi$

a. $3x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

untuk $k = 0$ diperoleh $x_1 = \frac{1}{6}\pi$

untuk $k = 1$ diperoleh $x_2 = \frac{5}{6}\pi$

b. $3x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$$x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

untuk $k = 1$ diperoleh $x_3 = \frac{1}{2}\pi$

Dari pengerjaan di atas diperoleh himpunan penyelesaiannya yaitu

$$\left\{\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{5}{6}\pi\right\}$$

6. $\tan 2x - \tan \frac{1}{3}\pi = 0, 0 \leq x \leq 2\pi$

$$\tan 2x = \tan \frac{1}{3}\pi, 0 \leq x \leq 2\pi$$

$$2x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$$

untuk $k = 0$ diperoleh $x_1 = \frac{1}{6}\pi$

untuk $k = 1$ diperoleh $x_2 = \frac{2}{3}\pi$

Himpunan penyelesaian dari persamaan di atas adalah $\left\{\frac{1}{6}\pi, \frac{2}{3}\pi\right\}$

Contoh 2:

Tentukan akar-akar dari persamaan trigonometri berikut kemudian tuliskan himpunan penyelesaiannya.

- $2 \cos x - \sqrt{3} = 0, 0^\circ \leq x \leq 360^\circ$
- $\sin(x - 30^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3}, 0^\circ \leq x \leq 360^\circ$
- $\sqrt{3} \sin x = \cos x, 0^\circ \leq x \leq 360^\circ$

Alternatif Penyelesaian:

- $2 \cos x - \sqrt{3} = 0, 0^\circ \leq x \leq 360^\circ$

$$2 \cos x = \sqrt{3}$$

$$\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

- $x = 30^\circ + k \cdot 360^\circ$

untuk $k = 0$ diperoleh $x_1 = 30^\circ$

- $x = -30^\circ + k \cdot 360^\circ$

untuk $k = 1$ diperoleh $x_2 = 330^\circ$

Himpunan penyelesaiannya adalah $\{30^\circ, 330^\circ\}$

- $\sin(x - 30^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3}, 0^\circ \leq x \leq 360^\circ$

$$\sin(x - 30^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3} = \sin 60^\circ$$

- $(x - 30^\circ) = 60^\circ + k \cdot 360^\circ$

$$x = 90^\circ + k \cdot 360^\circ$$

untuk $k = 0$ diperoleh $x_1 = 90^\circ$

- $(x - 30^\circ) = (180^\circ - 60^\circ) + k \cdot 360^\circ$

$$(x - 30^\circ) = 120^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$x = 150^\circ + k \cdot 360^\circ$$

untuk $k = 0$ diperoleh $x_2 = 150^\circ$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $\{90^\circ, 150^\circ\}$

- $\sqrt{3} \sin x = \cos x, 0^\circ \leq x \leq 360^\circ$

$$\sqrt{3} \sin x = \cos x$$

$$\sqrt{3} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{\cos x}$$

$$\sqrt{3} \tan x = 1$$

$$\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\tan x = \tan 30^\circ$$

$$x = 30^\circ + k \cdot 180^\circ$$

untuk $k = 0$ diperoleh $x_1 = 30^\circ$

untuk $k = 1$ diperoleh $x_2 = 210^\circ$
Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $\{30^\circ, 210^\circ\}$

Kita sudah bahas persamaan trigonometri untuk bentuk:

1. $\sin x = \sin \alpha$
2. $\cos x = \cos \alpha$
3. $\tan x = \tan \alpha$
4. $\sin x = k$, k sebuah konstanta
5. $\cos x = k$, k sebuah konstanta
6. $\tan x = k$, k sebuah konstanta

Bagaimana jika salah satu dari ruas kiri maupun ruas kanan bernilai negatif?
Kita akan coba bahas contoh berikut.

Contoh 3:

$$\sin 2x = -\frac{1}{2}\sqrt{3}, 0 \leq x \leq 2\pi$$

Penyelesaian:

$$\sin 2x = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

(Ingat, $\frac{1}{2}\sqrt{3} = \sin \frac{1}{3}\pi$)

Nilai sinus suatu sudut negatif berarti sudutnya berada di kuadran III dan IV

Kuadran III $2x = \left(\pi + \frac{1}{3}\pi\right) + k \cdot 2\pi$

$$2x = \frac{4}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot \pi$$

untuk $k = 0$ diperoleh $x_1 = \frac{2}{3}\pi$

untuk $k = 1$ diperoleh $x_2 = \frac{5}{3}\pi$

Kuadran IV $2x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

$$x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot \pi$$

untuk $k = 1$ diperoleh $x_3 = \frac{5}{6}\pi$

untuk $k = 2$ diperoleh $x_4 = \frac{11}{6}\pi$

Sehingga himpunan penyelesaiannya adalah $\left\{\frac{2}{3}\pi, \frac{5}{6}\pi, \frac{5}{3}\pi, \frac{11}{6}\pi\right\}$

C. Rangkuman

Menentukan penyelesaian persamaan trigonometri dasar untuk sudut ukuran derajat:

- a. $\sin x = \sin \alpha^\circ$

$$x = \begin{cases} \alpha^\circ + k \cdot 360^\circ & \text{--- (Kuadran 1)} \\ (180 - \alpha)^\circ + k \cdot 360^\circ & \text{--- (Kuadran 2)} \end{cases}$$
- b. $\cos x = \cos \alpha^\circ$

$$x = \begin{cases} \alpha^\circ + k \cdot 360^\circ & \text{--- (Kuadran 1)} \\ (-\alpha)^\circ + k \cdot 360^\circ & \text{--- (Kuadran 4)} \end{cases}$$
- c. $\tan x = \tan \alpha^\circ$

$$x = \alpha^\circ + k \cdot 180^\circ \text{--- (Kuadran 1 dan 3)}$$

Menentukan penyelesaian persamaan trigonometri dasar untuk sudut ukuran radian:

- a. $\sin x = \sin \alpha$

$$x = \begin{cases} \alpha + k \cdot 2\pi & \text{--- (Kuadran 1)} \\ (\pi - \alpha) + k \cdot 2\pi & \text{--- (Kuadran 2)} \end{cases}$$
- b. $\cos x = \cos \alpha$

$$x = \begin{cases} \alpha + k \cdot 2\pi & \text{--- (Kuadran 1)} \\ (-\alpha) + k \cdot 2\pi & \text{--- (Kuadran 4)} \end{cases}$$

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2

Persamaan Trigonometri Bentuk Kuadrat

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari materi ini, diharapkan Ananda dapat menentukan himpunan penyelesaian persamaan trigonometri berbentuk $Ax^2 + Bx + C = 0, A \neq 0$.

B. Uraian Materi

Persamaan trigonometri terkadang ada yang berbentuk persamaan kuadrat, atau mengharuskan kita untuk mengubah bentuknya menjadi persamaan kuadrat sehingga penyelesaian bisa kita peroleh dengan menggunakan aturan dalam persamaan kuadrat. Perubahan bentuk persamaan trigonometri ke bentuk persamaan kuadrat trigonometri memerlukan wawasan Ananda tentang identitas trigonometri seperti misalnya:

$$\begin{aligned}\sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\ 1 + \tan^2 x &= \sec^2 x\end{aligned}$$

Jika ada kata persamaan kuadrat, tentu saja diperlukan kompetensi untuk menentukan akar-akar persamaan kuadrat tersebut, misalnya dengan pefaktoran maupun melengkapkan kuadrat sempurna.

Perlu diingat pula rentang nilai untuk sinus dan cosinus adalah:

$$\begin{aligned}-1 &\leq \sin \alpha \leq 1 \\ -1 &\leq \cos \alpha \leq 1\end{aligned}$$

Agar lebih jelas, cermati beberapa contoh berikut.

Contoh 1:

Tentukan himpunan penyelesaian untuk $\cos^2 x - \cos x - 2 = 0$ untuk $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$

Alternatif penyelesaian:

Misal $p = \cos x$

$$\cos^2 x - \cos x - 2 = 0$$

$$p^2 - p - 2 = 0$$

$$(p - 2)(p + 1) = 0$$

$$p_1 = 2 \text{ atau } p_2 = -1$$

$$\cos x = 2 \text{ atau } \cos x = -1$$

($\cos x = 2$ tidak memenuhi)

Sehingga $\cos x = -1$

$$x = 180^\circ + k \cdot 360^\circ$$

diperoleh nilai $x = 180^\circ$ atau himpunan penyelesaiannya $\{180^\circ\}$

Ingat, nilai $-1 \leq \cos x \leq 1$

Contoh 2:

$2 - 2\cos^2 \alpha = \sin \alpha$ untuk $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$

Alternatif penyelesaian:

$$2 - 2\cos^2 \alpha = \sin \alpha$$

$$2(1 - \cos^2 \alpha) = \sin \alpha$$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$2 \sin^2 \alpha = \sin \alpha$$

$$2 \sin^2 \alpha - \sin \alpha = 0$$

$$\sin \alpha (2 \sin \alpha - 1) = 0$$

$$\sin \alpha = 0 \text{ atau } \sin \alpha = \frac{1}{2}$$

a. $\sin \alpha = 0$

$$\alpha = 0^\circ + k \cdot 360^\circ$$

untuk $k = 0$ diperoleh $\alpha_1 = 0^\circ$

untuk $k = 1$ diperoleh $\alpha_2 = 360^\circ$

$$\alpha = 180^\circ + k \cdot 360^\circ$$

untuk $k = 0$ diperoleh $\alpha_3 = 180^\circ$

b. $\sin \alpha = \frac{1}{2}$

Kuadran I $\alpha = 30^\circ + k \cdot 360^\circ$

untuk $k = 0$ diperoleh $\alpha_4 = 30^\circ$

Kuadran II $\alpha = (180^\circ - 30^\circ) + k \cdot 360^\circ$

$$\alpha = 150^\circ + k \cdot 360^\circ$$

untuk $k = 0$ diperoleh $\alpha_5 = 150^\circ$

Himpunan penyelesaian dari persamaan di atas adalah $\{0^\circ, 30^\circ, 150^\circ, 180^\circ, 360^\circ\}$

C. Rangkuman

Hal yang harus diperhatikan dalam mencari solusi persamaan trigonometri berbentuk $Ax^2 + Bx + C = 0$

1. Rentang nilai sinus dan kosinus:

$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1$$

$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1$$

2. Identitas trigonometri yang membantu penyelesaian

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$