KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
FUNGSI TRIGONOMETRI

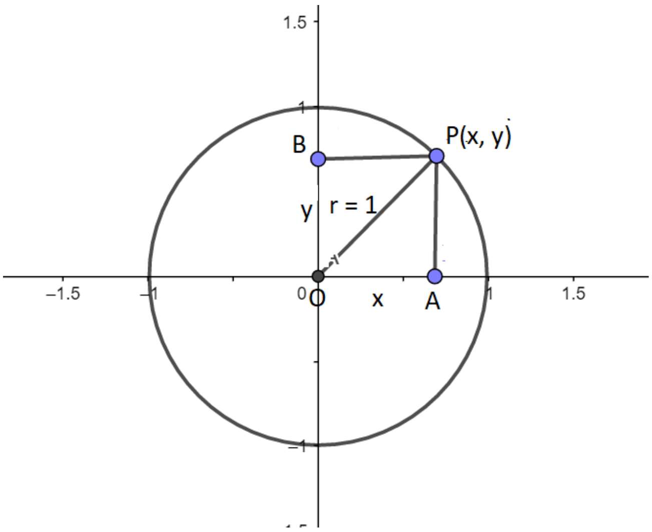
A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini diharapkan kalian dapat:
1. Mendeskripsikan fungsi trigonometri
2. Menjelaskan fungsi trigonometri dengan menggunakan lingkaran satuan

B. Uraian Materi

Dalam menentukan grafik fungsi trigonometri dapat digunakan dua cara, yaitu dengan menggunakan tabel sudut-sudut istimewa trigonometri dan membuat lingkaran satuan. Pada bahasan kita akan membahas cara menggambarkan fungsi trigonometri sinus, cosinus dan tangen dengan menggunakan bantuan lingkaran satuan. Pembahasan kita akan dibagi menjadi tiga bagian bagian Grafik Sinus, Grafik Cosinus dan Grafik Tangen.

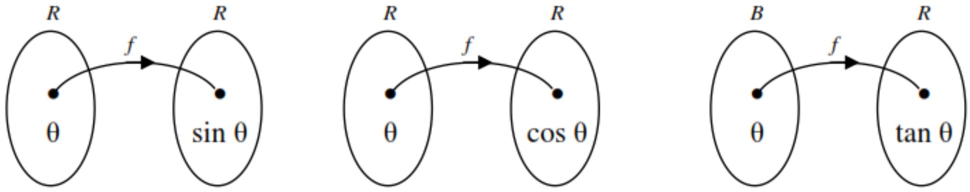
Pada bahasan sebelumnya kita telah membahas terkait dengan lingkaran satuan dengan jari-jari 1 satuan. Bahwa lingkaran satuan dengan jari-jari satu adalah lingkat yang berpusat di O(0,0) dengan jari-jari sebesar 1 satuan.
Dengan menggunakan definisi di atas, maka diperoleh gambar di bawah ini:



Dengan melihat gambar di atas, maka kita ingat kembali bahwa:
$Sin\ \theta\ = \frac{AP}{OP} = \frac{y}{r}$, $Cos\ \theta\ = \frac{OA}{OP} = \frac{x}{r}$, dan $Tan\ \theta\ = \frac{AP}{OA} = \frac{y}{x}$

Ingat kembali definisi fungsi adalah pemetaan yang menghubungkan semua anggota domain (daerah asal) ke tepat satu anggota kodomain (daerah hasil), maka fungsi trigonometri juga harus memenuhi ketentuan tersebut.
Pada fungsi trigonometri yang menjadi domain adalah besarnya sudut, atau pada gambar di atas adalah θ. Karena untuk setiap sudut θ hanya akan mempunyai satu nilai Sin θ, Cos θ, dan Tan θ yang merupakan anggota bilangan riil. Fungsi sinus,

cosinus dan tangen merupakan relasi dari himpunan sudut ke bilangan riil yang dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar (*i*) Gambar (*ii*) Gambar (*iii*)

Dengan:

a. gambar (i) menunjukan fungsi grafik sinus yang didefiniskan $f : \theta \rightarrow Sin\,\theta\,, \theta \in R$, dengan $f(\theta) = Sin\,\theta$
b. gambar (ii) menunjukan fungsi cosinus yang didefinisikan $f : \theta \rightarrow Cos\,\theta\,, \theta \in R$, dengan $f(\theta) = Cos\,\theta$
c. gambar (iii) adalah grafik fungsi tangen yang didefinisikan $f : \theta \rightarrow Tan\,\theta\,, \theta \in R$, dengan $f(\theta) = Tan\,\theta$

Fungsi $f(\theta) = Sin\,\theta$, $f(\theta) = Cos\,\theta, f(\theta) = Tan\,\theta$ kita sebut sebagai fungsi trigonometri. Adapun nilai Sin, Cos dan Tangen suatu sudut dapat bernilai positif maupun bernilai negatif atau nol tergantung letak sudutnya berada di kudrannya.

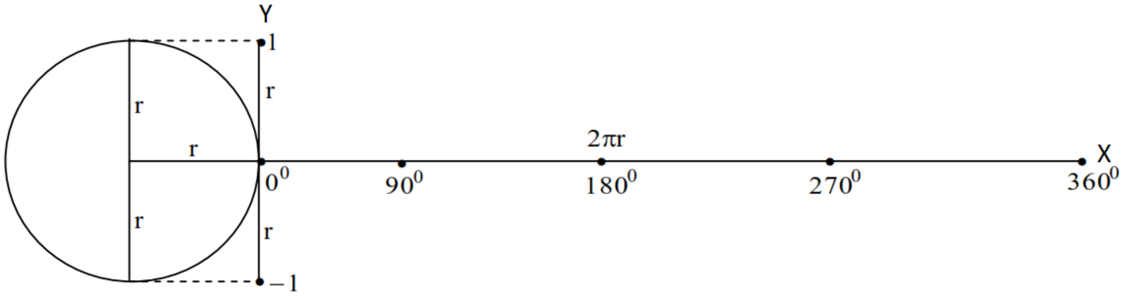
Menentukan nilai fungsi trigonometri sama seperti kita menentukan nilai fungsi yang lainnya, yaitu dengan melakukan substitusi nilai variable yang diberikan kedalam fungsinya. (Ingat kembali nilai-nilai sudut trigonometri, khususnya terkait dengan nilai sudut istimewa!)

Berikutnya akan kita bahas bagaimana menggambarkan grafik fungsi trigonometri dengan menggunakan lingkaran satuan atau lingkaran dengan jari-jari satuan. Untuk memahami fungsi trigonometri secara umum, maka kita terlebih dahulu membahasa grafik fungsi trigonometri dasar yaitu grafik y = Sinx, ,, y = cos x dan y = tan x.

Grafik fungsi trigonometri digambar dalam tata koordinat Cartesius yang menggunakan dua sumbu, yakni sumbu x sebagai nilai sudut dan sumbu y sebagai nilai fungsinya. Untuk melukis kedua sumbu ini dipakai aturan tersendiri, yaitu sebagai berikut:

a. Sumbu x sebagai nilai sudut, panjangnya sama dengan keliling lingkaran (2πr). Dalam satuan derajar sumbu ini dibagi menjadi 360 bagian dengan setiap bagiannya sama dengan 1^0. Sedangkan dalam satuan radian nilai-nilai tersebut dikonversikan ke dalam π radian.
b. Sumbu y sebagai nilai fungsinya, dengan skalanya dihitung satu satuan panjang sebagai panjang jari-jari lingkaran.

Dari ilustrasi di atas, maka dapat digambarkan koordinat Cartesius yang digunakan untuk menggambar fungsi trigonometri sebagai berikut:

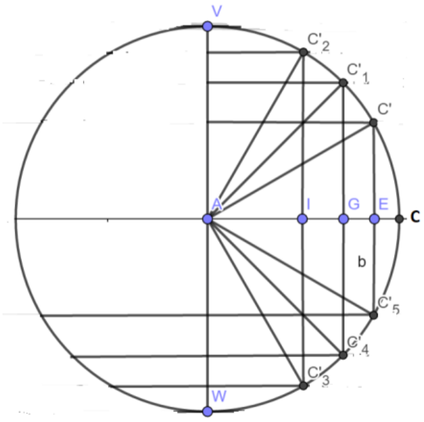


Dengan menggunakan koordinat Cartesius di atas, maka dibawah akan kita bahas cara untuk menggambar grafik trigonometri sederhana y = sin x, y = cos x dan y = tan x dengan menggunakan lingkaran satuan sebagai berikut:

1. **Grafik Fungsi Sinus**

Untuk membuat grafik fungsi y = sin x, maka yang langkah-langkahnya adalah:

a. bidang gambar pada koordinat Cartesius dengan sumbu-x menunjukan besarnya sudut dan sumbu-y adalah nilai fungsi trigonometrinya.
b. buat lingkaran satuan yaitu lingkaran dengan jari-jari 1 satuan.
c. buatlah sudut pada lingkaran satuan yang bersesuaian dengan sudut istimewa yang telah kita pelajari sebelumnya.
Perhatikan gambar berikut ini:



Lingkaran disamping adalah sebuah lingkaran dengan jari-jari 1 satuan. Maka panjang AC = 1 satuan.

Perhatikan 1:

Besar $\angle$CAC = 0^0.

Maka diperoleh bahwa AC adalah sebuah garis lurus sehingga besar sudut yang diperoleh adalah 0^0. Ingat bahwa Sin 0^0 = 0.

Perhatikan 2:

Besar $\angle$CAC' = 30^0.

Maka perhatikan segitiga CAC', diperoleh bahwa

$$Sin\ 30^0 = \frac{C'E}{AC} = \frac{C'E}{1}$$

Maka $C'E = Sin\ 30^0 \ .1 = \frac{1}{2}$.

Sehingga panjang C'E = $\frac{1}{2}$.

Dengan cara yang sama diperoleh bahwa panjang $EC_5' = C'E = \frac{1}{2}$

Perhatikan 3:

Besar $\angle CAC_1'$ = 45^0.

Maka perhatikan segitiga CAC_1', diperoleh bahwa

$Sin\ 45^0 = \frac{GC_1'}{AC} = \frac{GC_1'}{1}$

Maka $GC_1' = Sin\ 45^0\ .1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Sehingga panjang $GC_1' = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Dengan cara yang sama diperoleh bahwa panjang $EC_4' = GC_1' = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Perhatikan 4:

Besar $\angle CAC_2' = 60^0$.

Maka perhatikan segitiga CAC_2', diperoleh bahwa

$Sin\ 60^0 = \frac{AC_2'}{AC} = \frac{C'E}{1}$

Maka $AC_2' = Sin\ 60^0\ .1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Sehingga panjang $AC_2' = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Dengan cara yang sama diperoleh bahwa panjang $AC_2' = IC_3' = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Perhatikan 5:

Besar $\angle$CAV = 90⁰.

Maka perhatikan segitiga CAV, diperoleh bahwa

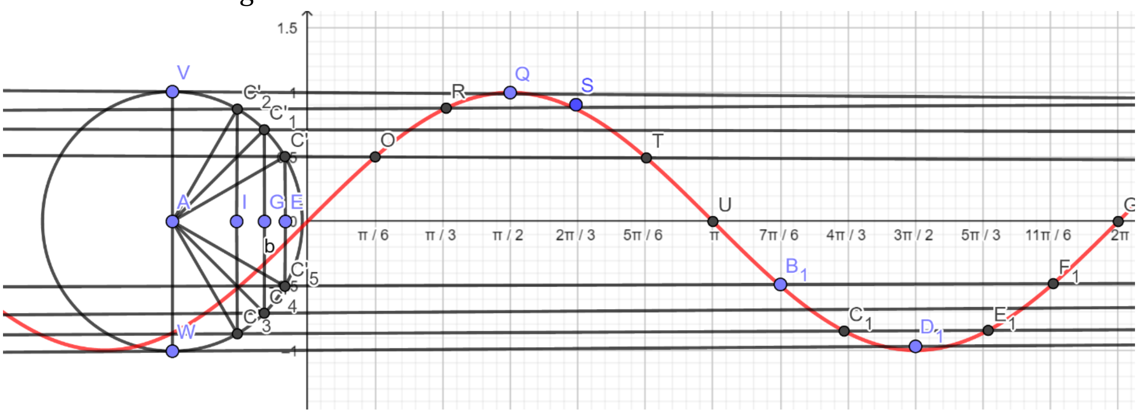
$Sin\ 90 = \frac{AV}{AC} = \frac{1}{1}$

Maka $AV = Sin\ 90^0\ .1 = 1$

Sehingga panjang AV = 1

Dengan cara yang sama diperoleh bahwa panjang AV = AW = 1.

Berdasarkan yang kita peroleh diatas, maka dapat menggambarkan grafik fungsi trigonometri y = sin x dengan meletakkan titik-titik yang kita peroleh melalui lingkaran satuan di atas sebagai berikut:



Maka grafik fungsi trigonometri y = sin x untuk nilai $0^0 \leq x \leq 2\pi^0$ diperoleh seperti pada grafik di atas.

Berdasarkan grafik di atas, maka dapat kita peroleh beberapa hal sebagai berikut:

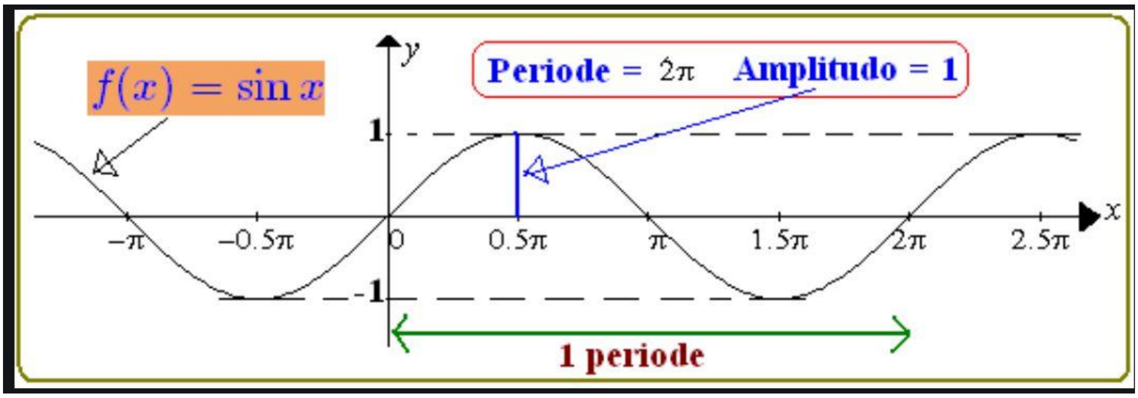
a) untuk $x = \frac{\pi}{2}$ maka y = 1 adalah nilai maksimum fungsi y = sin x

b) untuk $x = \frac{3\pi}{2}$ maka y = -1 adalah nilai minimum fungsi y = sin x

c) grafik fungsi y = sin x memotong sumbu y pada x = $0^0, \pi$ dan 2π

d) grafik fungsi y = sin x mempunyai periode 2π, yaitu besar sudut yang dibutuhkan untuk membentuk 1 gelombang fungsi y = sin x

Kesimpulan dari a) sampai dengan d) dapat disimpulkan pada gambar dibawah ini:

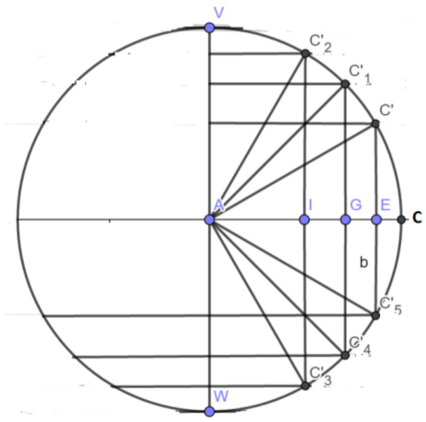


2. Grafik Fungsi Cosinus

Untuk membuat grafik fungsi y = cos x, maka yang Langkah-langkahnya adalah:

a. bidang gambar pada koordinat Cartesius dengan sumbu-x menunjukan besarnya sudut dan sumbu-y adalah nilai fungsi trigonometrinya.
b. buat lingkaran satuan yaitu lingkaran dengan jari-jari 1 satuan.
c. buatlah sudut pada lingkaran satuan yang bersesuaian dengan sudut istimewa yang telah kita pelajari sebelumnya.

Perhatikan gambar berikut ini:



Lingkaran disamping adalah sebuah lingkaran dengan jari-jari 1 satuan. Maka panjang AC = 1 satuan.

Perhatikan 1:

Besar $\angle$CAC = 0^0.

Maka diperoleh bahwa AC adalah sebuah garis lurus sehingga besar sudut yang diperoleh adalah 0^0. Ingat bahwa Cos 0^0 = 1.

Perhatikan 2:

Besar $\angle$CAC' = 30^0.

Maka perhatikan segitiga CAC', diperoleh bahwa

$$Cos\ 30^0 = \frac{AE}{AC'} = \frac{AE}{1}$$

Maka $AE = Cos\ 30^0 \,.\, 1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Sehingga panjang $AE = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Maka dengan menggunakan Teorema Phytagoras, maka diperoleh bahwa panjang

$$(CE')^2 = (AC')^2 - (AE)^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Maka $CE' = \frac{1}{2}$

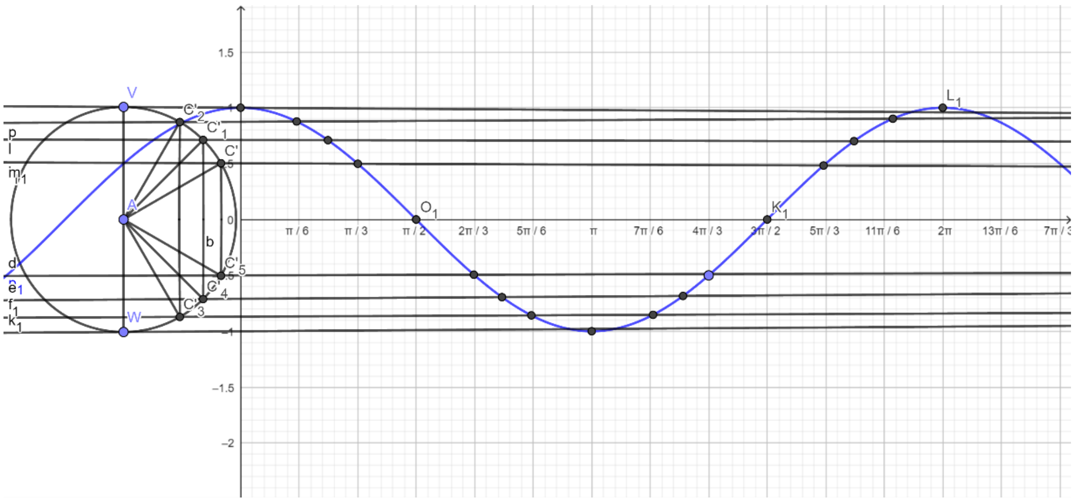
Dengan cara yang sama diperoleh bahwa panjang $EC_5' = C'E = \frac{1}{2}$

Perhatikan 3:
Besar $\angle CAC_1'$ = 45⁰.
Maka perhatikan segitiga CAC_1', diperoleh bahwa
$Cos\ 45^0 = \frac{AG}{AC_1'} = \frac{AG}{1}$
Maka $AG = Cos\ 45^0\ .1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
Maka dengan menggunakan Teorema Phytagoras, maka diperoleh bahwa panjang
$(GC_1')^2 = (AC_1')^2 - (AG)^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$
Maka $GC_1' = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
Dengan cara yang sama diperoleh bahwa panjang $GC_4' = GC_1' = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Perhatikan 4:
Besar $\angle CAC_2'$ = 60⁰.
Maka perhatikan segitiga CAC_2', diperoleh bahwa
$Cos\ 60^0 = \frac{AI}{AC_2'} = \frac{AI}{1}$
Maka $AI = Cos\ 60^0\ .1 = \frac{1}{2}$.
Sehingga panjang $AI = \frac{1}{2}$
Maka dengan menggunakan Teorema Phytagoras, maka diperoleh bahwa panjang
$(IC_2')^2 = (AC_2')^2 - (AI)^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$
Maka $IC_2' = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
Dengan cara yang sama diperoleh bahwa panjang $IC_3' = IC_2' = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Perhatikan 5:
Besar $\angle$CAV = 90⁰.
Maka perhatikan segitiga CAV, diperoleh bahwa
$Cos\ 90^0 = \frac{AV}{AC} = \frac{1}{1}$
Maka $AV = Cos\ 90^0\ .1 = 0$
Sehingga panjang AV = 0
Dengan cara yang sama diperoleh bahwa panjang AV = AW = 0.

Berdasarkan yang kita peroleh diatas, maka dapat menggambarkan grafik fungsi trigonometri y = cos x dengan meletakan titik-titik yang kita peroleh melalui lingkaran satuan di atas sebagai berikut:

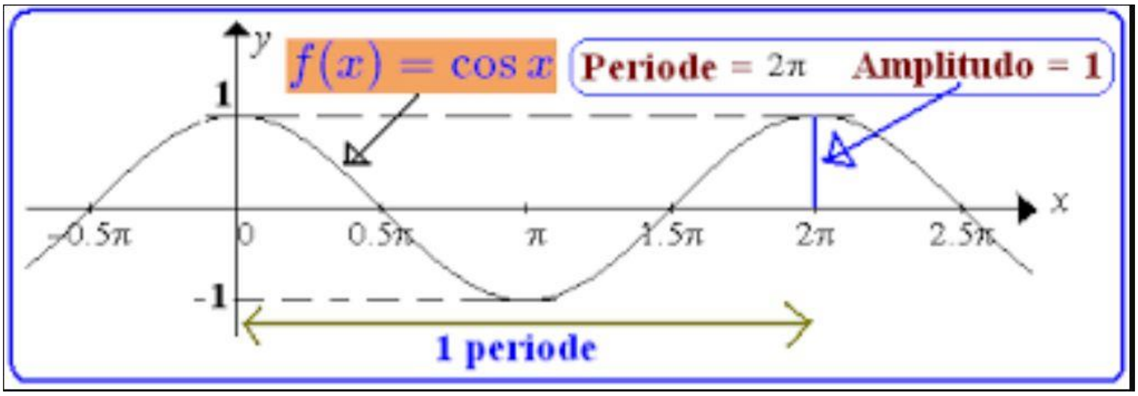


Maka grafik fungsi trigonometri y = cos x untuk nilai $0^0 \leq x \leq 2\pi^0$ diperoleh seperti pada grafik di atas.

Berdasarkan grafik di atas, maka dapat kita peroleh beberapa hal sebagai berikut:

a) untuk $x = 0$ maka y = 1 adalah nilai maksimum fungsi y = cos x
b) untuk $x = \pi$ maka y = -1 adalah nilai minimum fungsi y = cos x
c) untuk $x = 360^0$ maka y = 1 adalah nilai maksimum fungsi y = cos x
d) grafik fungsi y = cos x memotong sumbu-y pada x = $\frac{\pi}{2}$ dan $x = \frac{3\pi}{2}$
e) grafik fungsi y = cos x mempunyai periode 2π, yaitu besar sudut yang dibutuhkan untuk membentuk 1 gelombang fungsi y = cos x

Kesimpulan dari a) sampai dengan d) dapat disimpulkan pada gambar dibawah ini:

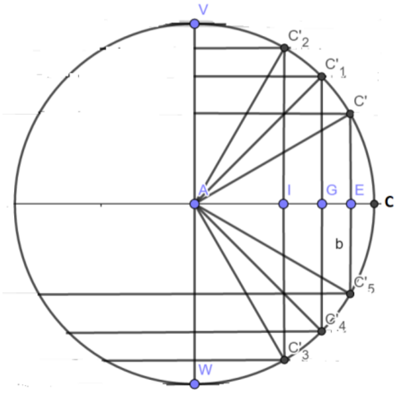


3. Grafik Fungsi Tangen

Untuk membuat grafik fungsi y = tan x, maka yang Langkah-langkahnya adalah:

a. bidang gambar pada koordinat Cartesius dengan sumbu-x menunjukan besarnya sudut dan sumbu-y adalah nilai fungsi trigonometrinya.
b. buat lingkaran satuan yaitu lingkaran dengan jari-jari 1 satuan.
c. buatlah sudut pada lingkaran satuan yang bersesuaian dengan sudut istimewa yang telah kita pelajari sebelumnya.

Perhatikan gambar berikut ini:



Lingkaran disamping adalah sebuah lingkaran dengan jari-jari 1 satuan. Maka panjang AC = 1 satuan.

Perhatikan 1:

Besar $\angle$CAC = 0^0.

Maka diperoleh bahwa AC adalah sebuah garis lurus sehingga besar sudut yang diperoleh adalah 0^0. Ingat bahwa Tan 0^0 = 0

Perhatikan 2:

Besar $\angle$CAC' = 30^0.

Maka perhatikan segitiga CAC', diperoleh bahwa

$Tan\ 30^0 = \dfrac{C'E}{AE}$

Sebelumnya telah kita peroleh bahwa $C'E = \frac{1}{2}$ dan panjang $AE = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, maka dipeoleh bahwa $Tan\ 30^0 = \frac{C'E}{AE} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

Perhatikan 3:

Besar $\angle CAC_1'$ = 45^0.

Maka perhatikan segitiga CAC_1', diperoleh bahwa

$Tan\ 45^0 = \frac{GC_1'}{AG}$.

Dari perhitungan sebelumnya telah kira peroleh bahwa panjang $GC' = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ dan panjang $AG = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Maka $Tan\ 45^0 = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = 1$

Perhatikan 4:

Besar $\angle CAC_2'$ = 60^0.

Maka perhatikan segitiga CAC_2', diperoleh bahwa

$Tan\ 60^0 = \dfrac{IC_2'}{AI}$

Dari perhitungan sebelumnya diperoleh bahwa $IC_2' = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ dan $AI = \frac{1}{2}$. Maka diperoleh bahwa $Tan\ 60^0 = \frac{IC_2'}{AI} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

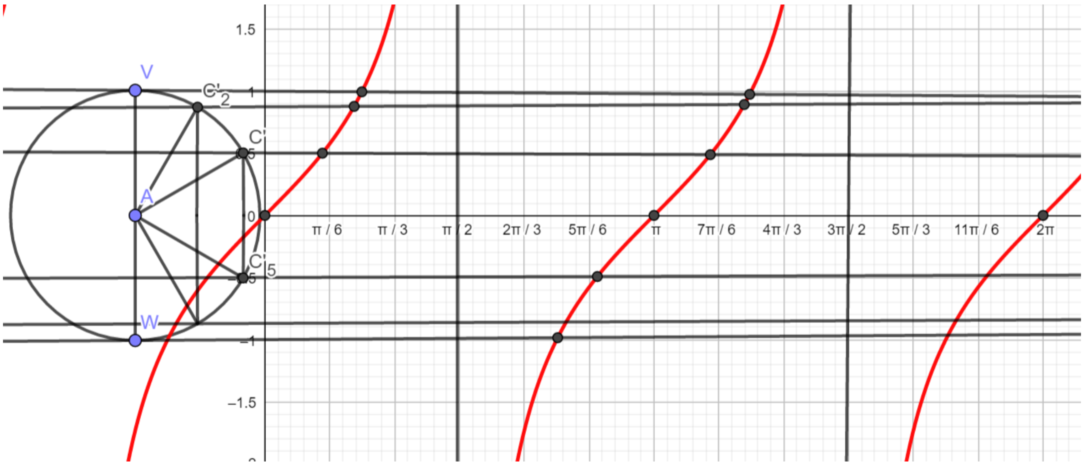
Perhatikan 5:

Besar $\angle$CAV = 90^0.

Maka perhatikan segitiga CAV, diperoleh bahwa

$Tan\ 90^0 = \frac{AV}{AC} = \frac{1}{0}$, sehingga diperoleh bahwa $Tan\ 90^0 = \infty$

Berdasarkan yang kita peroleh di atas, maka dapat menggambarkan grafik fungsi trigonometri y = tan x dengan meletakan titik-titik yang kita peroleh melalui lingkaran satuan di atas sebagai berikut:

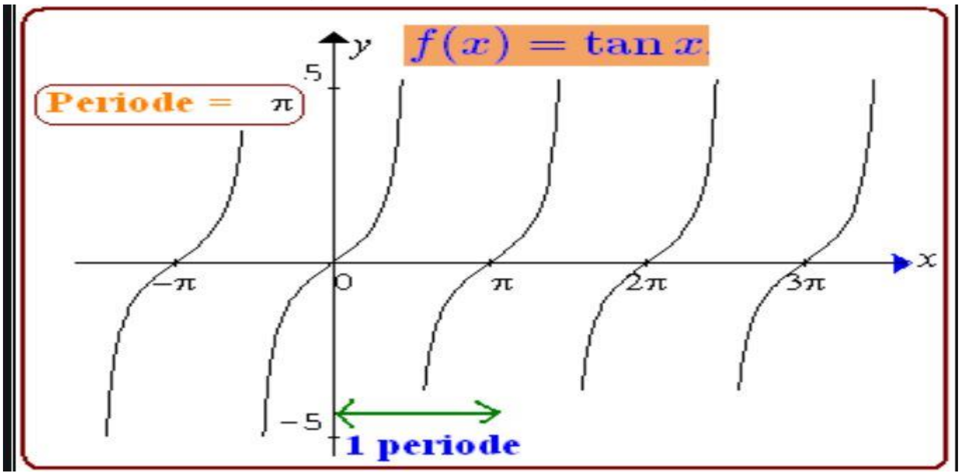


Maka grafik fungsi trigonometri y = tan x untuk nilai $0^0 \leq x \leq 2\pi^0$ diperoleh seperti pada grafik di atas.

Berdasarkan grafik di atas, maka dapat kita peroleh beberapa hal sebagai berikut:

a) grafik fungsi y = tan x memotong sumbu-y pada x = 0^0, x = π dan $x = 2\pi$
b) grafik fungsi y = tan x tidak mempunyai nilai maksimum dan tidak mempunyai nilai minimum.
c) Grafik fungsi y = tan x tidak mempunyai nilai untuk x = $\frac{\pi}{2}$ dan x = $\frac{3\pi}{2}$
d) grafik fungsi y = tan x mempunyai periode π, yaitu besar sudut yang dibutuhkan untuk membentuk 1 gelombang fungsi y = tan x

Kesimpulan dari a) sampai dengan d) dapat disimpulkan pada gambar dibawah ini:



Untuk kita lebih memahami lagi terkait dengan grafik fungsi trigonometri, maka kalian lihat beberapa contoh dibawah ini.

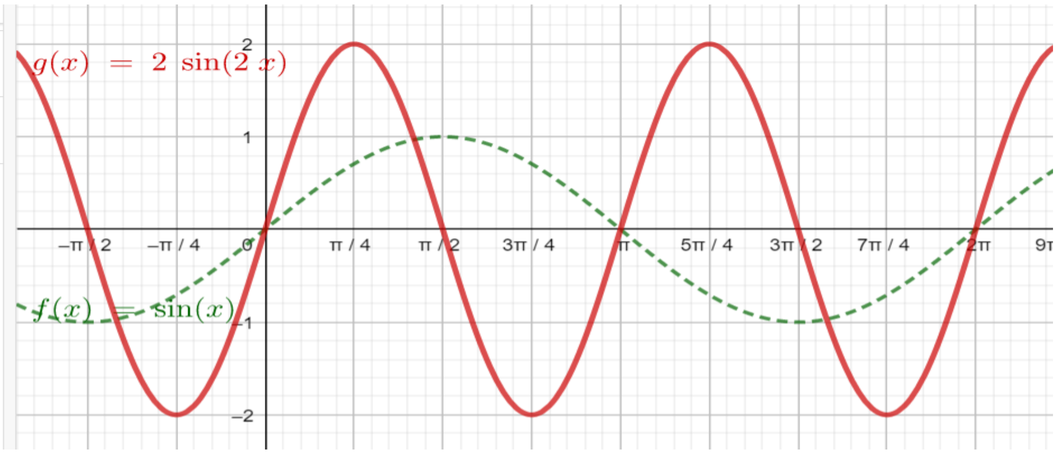
CONTOH 1

Gambarlah grafik dari y = 2 Sin 2x

Jawaban:

Langkah-langkah untuk menggambar grafik y = 2 Sin 2x adalah:

a. Pertama gambarlah dahulu grafik y = sin x dan y = Sin 2x sebagai dasar
b. Nilai maksimum y = sin x adalah 1, maka nilai maksimum y = 2 sin x = 2 (1) = 2. Dan juga nilai minimum y = sin x adalah -1, maka nilai minimum y = 2 sin x = 2 (-1) = -2.
c. Peroide grafik fungsi y = 2 Sin 2x sama dengan periode fungsi y = Sin 2x, karena sudutnya sama. Maka periodenya sama dengan $\frac{360^0}{2} = 180^0$
d. Perhatikan kembali grafik y = sin x, dengan periode sejauh 360^0, memotong sumbu-x di titik x = 0^0, 180^0, 360^0. Maka grafik y = Sin 2x dengan periode sejauh 180^0, memotong sumbu-x di titik x = 0^0, 90^0, 180^0.
e. Grafik y = sin x mencapai maksimum di x = 90^0 dengan nilai y_{max} = 2 dan mencapai minimum di x = 270^0 dengan nilai y_{min} = -2.
f. Berdasarkan informasi di atas, maka diperoleh grafik y = 2 Sin 2x sebagai berikut:



CONTOH 2

Gambarlah grafik dari $y = -3\ Cos\ \left(\frac{1}{2}x\right)$, untuk $0 \leq x \leq 360^0$

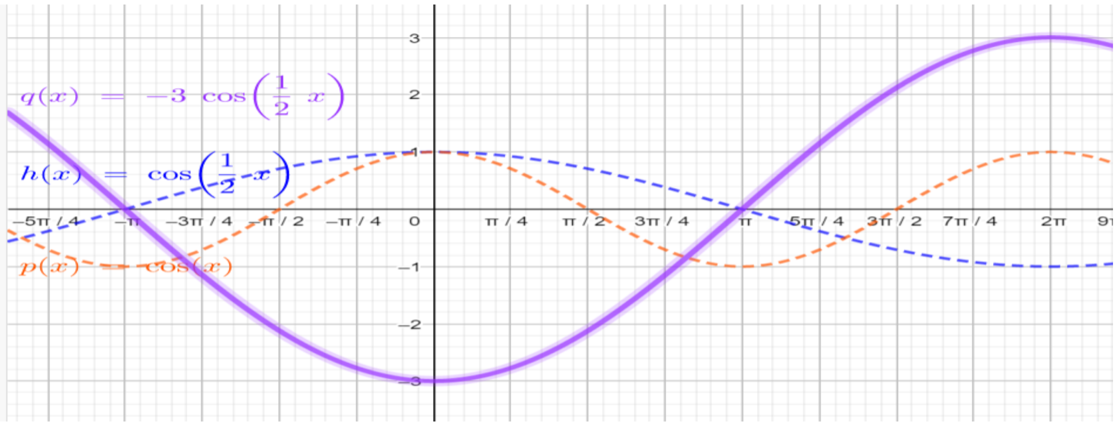
Jawaban:

Langkah-langkah untuk menggambar grafik $y = -3\ Cos\ \left(\frac{1}{2}x\right)$adalah:

a. Pertama gambarlah dahulu grafik y = cos x dan y = $Cos\ \left(\frac{1}{2}x\right)$
b. Nilai maksimum y = cos x adalah 1, maka nilai maksimum y = $Cos\ \left(\frac{1}{2}x\right)$= 1. Karena $y = -3\ Cos\ \left(\frac{1}{2}x\right)$, maka nilai y_{max} = -3 (1) = -3 menjadi **nilai minimum**
c. Nilai minimum y = cos x adalah -1, maka nilai minimum y = $Cos\ \left(\frac{1}{2}x\right)$= -1. Karena $y = -3\ Cos\ \left(\frac{1}{2}x\right)$, maka nilai y_{min} = -3 (-1) = 3 menjadi **nilai maksimum**
d. Periode grafik fungsi $y = -3\ Cos\ \left(\frac{1}{2}x\right)$ sama dengan periode fungsi y = $Cos\ \left(\frac{1}{2}x\right)$, karena sudutnya sama. Maka periodenya sama dengan $\frac{360^0}{\frac{1}{2}} = 720^0$

e. Perhatikan kembali grafik y = $Cos\ (x)$, dengan periode sejauh 36^0, memotong sumbu-x di titik x =90^0, 270^0. Maka grafik y = $Cos\ \left(\frac{1}{2}x\right)$ dengan periode sejauh 720^0, memotong sumbu-x di titik x = 180^0, 540^0.

f. Berdasarkan informasi di atas, maka diperoleh grafik $y = -3\ Cos\ \left(\frac{1}{2}x\right)$ sebagai berikut:



CONTOH 3

Tentukan nilai maksimum dan minimum fungsi y = 2 Sin 3x !

Jawaban:

Bentuk dasar dari fungsi y = 2 Sin 3x adalah y = Sin 3x.

Nilai maksimum y = Sin 3x sama dengan nilai maksimum y = sin x sama dengan 1.

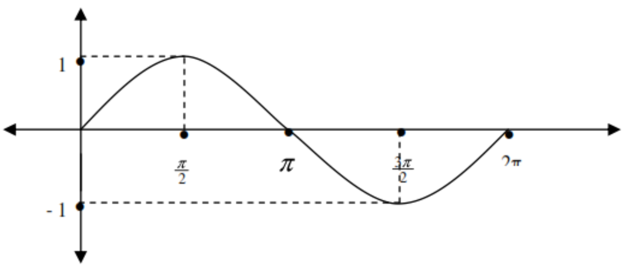
Maka nilai y_{max} = Sin 3x = 1. Maka nilai y_{max} = 2 Sin 3x = 2 (1) = 2

Nilai minimum y = Sin 3x sama dengan nilai minimum y = sin x sama dengan -1.

Maka nilai y_{min} = Sin 3x = -1. Maka nilai y_{max} = 2 Sin 3x = 2 (-1) = -2

C. Rangkuman

1. Lingkaran satuan adalah lingkaran yang memiliki persamaan $x^2 + y^2 = 1$
2. Menggambar grafik fungsi trigonometri dapat digunakan dengan dua cara, yaitu dengan tabel nilai-nilai sudut istimewa dan menggunakan lingkaran satuan
3. Perbandingan nilai trigonometri dapat terlihat pada bidang Cartesius
4. Grafik y = sin x, untuk $0^0 \leq x \leq 2\pi$ adalah:



Sifat

a. *Max = 1*

b. Min = - 1

c. sin (- x) = - sin x

d. Priode = 2π

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2

GRAFIK FUNGSI TRIGONOMETRI BENTUK Y = A Sin b (X ±C) ±K

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran kedua ini diharapkan siswa dapat:

1. Menjelaskan perubahan grafik fungsi trigonometri yang diakibatkan oleh bentuk fungsi y = a Sin b (x±c) ± d.
2. Mengidentifikasi grafik fungsi trigonometri y = a Sin b (x±c) ± d.

B. Uraian Materi

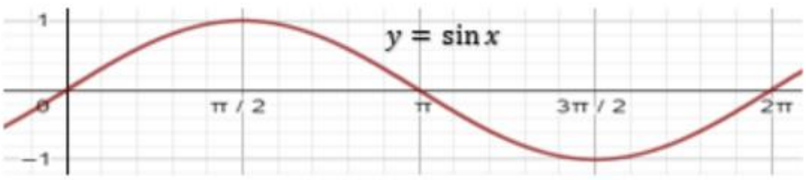
Sebagaimana telah diperoleh pada pembelajaran sebelumnya, bahwa fungsi trigonometri sinus, cosinus dan tangen adalah bentuk fungsi yang periodik. Fungsi periodic adalah fungsi yang sifatnya berulang-ulang secara teratur. Karena bersifat periodic, berarti ada periodenya.

Periode bisa kita sebut juga sebagai siklus yaitu pengulanagn hal yang sama setelah suatu selang tertentu. Fungsi y = sin x akan membentuk siklus/periode setiap 360^0. Hal ini bermakna bahwa setelah x mencapai 360^0, maka grafik fungsi y = sin x akan mengulang kembali ke awal.

Supaya lebih jelas kalian bisa melihat dari ilustrasi berikut ini!

1. Grafik Fungsi Sinus

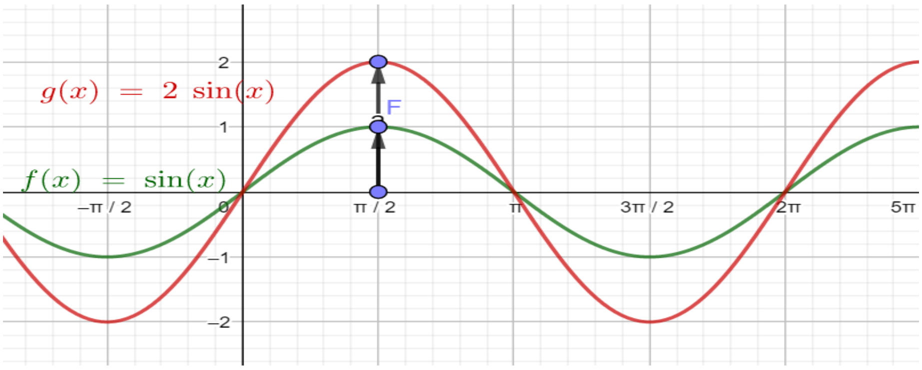
   Ingat kembali bentuk fungsi y = sin x, untuk $0^0 \leq x \leq 360^0$ sebagai berikut:



   Fungsi y = sin x mempunyai nilai maksimum di y = 1 dan nilai minimum di y = -1. Nilai maksimum atau nilai minimum untuk y = 1, maka y = 1 disebut juga sebagai amplitude dari grafik fungsi y = sin x.

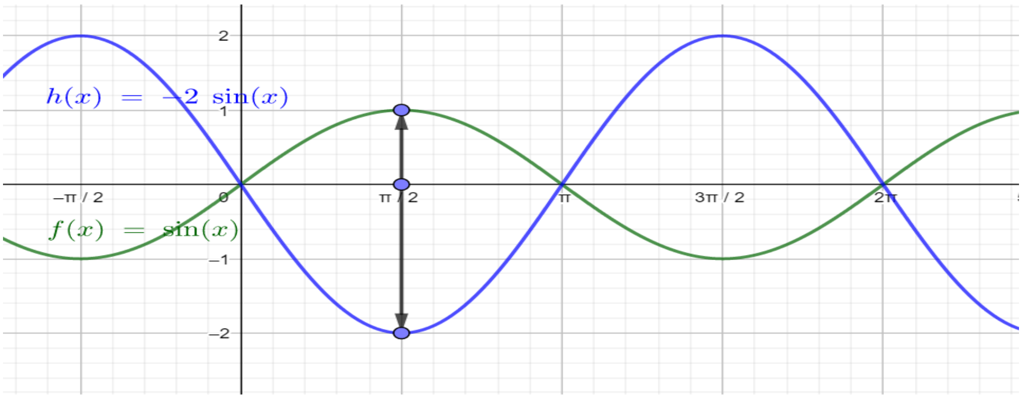
   Perhatikan pula bahwa grafik fungsi y = sin x mempunyai periode sejauh 360^0 untuk membentuk satu gelombang.

   a. Misalkan fungsi $y_2 = 2y_1$ atau $y_2 = 2\,Sin\,x$, $0^0 \leq x \leq 360^0$, maka grafik fungsi nya menjadi seperti berikut:



Berdasarkan grafik di atas, perhatikan bahwa nilai maksimum y_2 = 2 sin x menjadi sama dengan 2 dan nilai minimum menjadi -2. Sedangkan periode dari y_2 = 2 sin x tetap sama dengan 360^0.

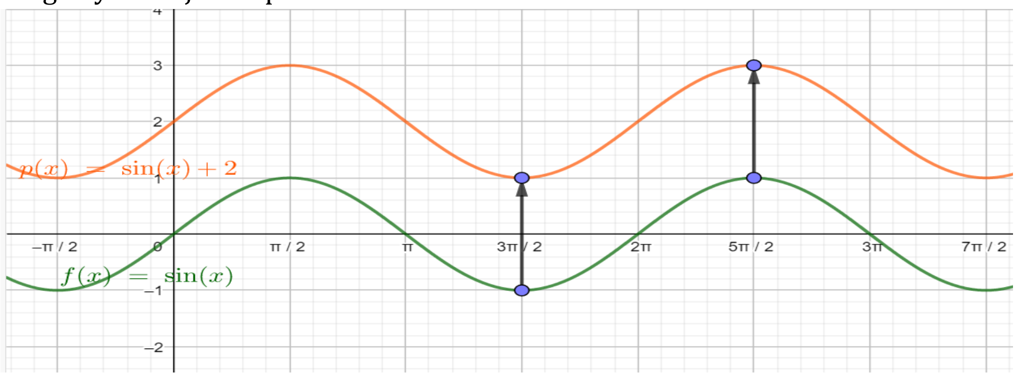
b. Misalkan fungsi $y_3 = -2y_1$ atau $y_3 = -2\ sin\ x$, $0^0 \leq x \leq 360^0$, maka grafik fungsi nya menjadi seperti berikut:



Berdasarkan grafik diatas perhatikan bahwa nilai maksimum y_3 = -2 sin x menjadi sama dengan 2 dan nilai minimum menjadi -2. Sedangkan periode dari y_3 = -2 sin x tetap sama dengan 360^0.

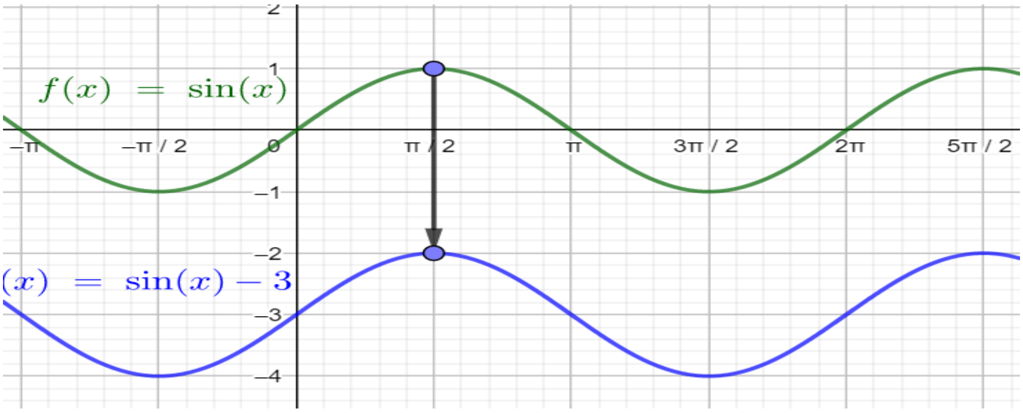
Berdasarkan a) dan b) maka diperoleh bahwa secara umum jika diberikan fungsi trigonometri y = k Sin x, maka nilai maksimum y = k dan nilai minimum = -k

c. Misalkan fungsi $y_4 = y_1 + 2$ atau $y_4 = sin\ x + 2$, $0^0 \leq x \leq 360^0$, maka grafik fungsinya menjadi seperti berikut:



Berdasarkan grafik fungsi trigonometri di atas, maka diperoleh bahwa nilai maksimum y_4 = 3 atau nilai maksimum y_4 = nilai maksimum y_1 + 2 = 1 + 2 = 3. Sedangkan nilai minimum y_4 = 1 atau nilai minimum y_4 = nilai minimum y_1+2=-1

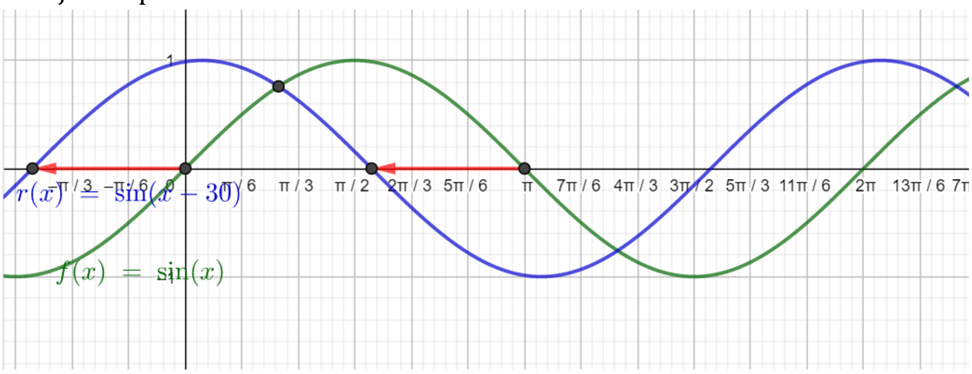
d. Misalkan fungsi $y_5 = y_1 - 3$ atau $y_4 = Sin\, x - 2,\ 0^0 \leq x \leq 360^0$, maka grafik fungsinya menjadi seperti berikut:



Berdasarkan grafik fungsi trigonometri di atas, maka diperoleh bahwa nilai maksimum y_5 = -2 atau nilai maksimum y_5 = nilai maksimum y_1 -3 = 1 -3 = -2. Sedangkan nilai minimum y_5 = -4 atau nilai minimum y_5 = nilai minimum y_1 – 3 = -1 - 3 = - 4.

> Berdasarkan ilustrasi pada c) dan d) maka diperoleh jika y = sin x + c, maka y mempunyai nilai maksimum sama dengan 1 + c dan y mempunyai nilai minimum 1 – c.

e. Misalkan fungsi $y_6 = \text{Sin}\left(\text{x} - \frac{\pi}{6}\right),\ 0^0 \leq x \leq 360^0$, maka grafik fungsinya menjadi seperti berikut:

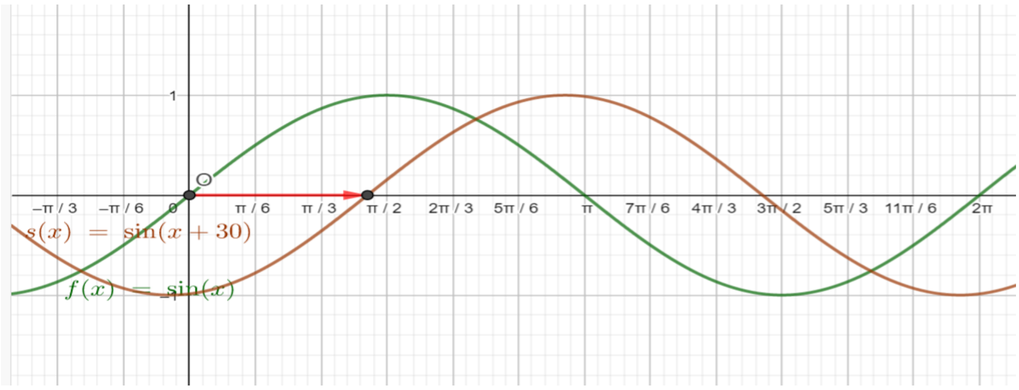


Berdasarkan gambar di atas, maka dapat diperoleh bahwa fungsi y = sin x memotong sumbu -x dititik x = $0, \frac{\pi}{2}, 2\pi$

Sedangkan pada grafik y = Sin (x - 30^0) diperoleh bahwa titik potong sumbu-x memenuhi untuk y = 0, maka diperoleh untuk:

i. Sin (x - 30^0) = 0 atau x - 30^0 = 0 atau x = 30^0, 150^0
ii. Sin (x - 30^0) = 0 atau x - 30^0 = 180^0 atau x = 210^0

f. Misalkan fungsi $y_7 = \text{Sin}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$, $0^0 \leq x \leq 360^0$, maka grafik fungsinya menjadi seperti berikut:



Berdasarkan gambar di atas, maka dapat diperoleh bahwa fungsi y = sin x memotong sumbu -x dititik x = $0, \frac{\pi}{2}, 2\pi$

Sedangkan pada grafik y = Sin (x + 30^0) diperoleh bahwa titik potong sumbu-x memenuhi untuk y = 0, maka diperoleh untuk:

i. Sin (x + 30^0) = 0 atau x + 30^0 = 0 atau x = - 30^0 ,150^0

ii. Sin (x + 30^0) = 0 atau x + 30^0 = 180^0 atau x = 210^0

Berdasarkan ilustrasi yang ada di e) dan f), jika grafik fungsi trigonometri bertambah sejauh α^0 atau Sin (x + 30^0) maka diperoleh grafiknya dapat diperoleh dari grafik fungsi y = sin x yang digeser sejauh α^0 ke arah kanan sepanjang sumbu-x.

Sedangkan grafik fungsi trigonometri berkurang sejauh α^0 atau Sin (x - 30^0) maka diperoleh grafiknya dapat diperoleh dari grafik fungsi y = sin x yang digeser sejauh α^0 ke arah kiri sepanjang sumbu-x

Berdasarkan bahasan di atas, maka dapat kita buat kesimpulan secara umum bahwa grafik fungsi sinus yang dinyatakan dalam bentuk $y = k\ Sin\ a(x \pm \beta)^0 + c$ dapat diperoleh:

a. Nilai maksimum fungsi adalah $y = |k| + c$

b. Nilai minimum fungsi adalah $y = -|k| + c$

c. Amplitudo dari fungsi sama dengan |k|

d. Periode fungsi adalah $\frac{360^0}{a}$ atau $\frac{2\pi}{a}$

e. Jika $(x + \beta)$ maka fungsi $y = k\ Sin\ ax$ bergeser kekiri sejauh β

f. Jika $(x - \beta)$ maka fungsi $y = k\ Sin\ ax$ bergeser kekanan sejauh β

g. Jika konstanta c > 0, maka fungsi $y = k\ Sin\ ax$ bergeser ke atas sejauh c

h. Jika konstanta c < 0, maka fungsi $y = k\ Sin\ ax$ bergeser ke atas kebawah c

i. Grafik fungsi y = $= -k\ Sin\ a(x \pm \beta)^0$ adalah cerminan grafik fungsi y = $= k\ Sin\ a(x \pm \beta)^0$ terhadap sumbu-x

Dengan cara yang sama seperti di atas, maka untuk mendapatkan ilustrasi terkait dengan grafik fungsi cosinus yang dinyatakan dalam bentuk $y = k\ Cos\ a(x \pm \beta)^0 + c$ dapat diperoleh:

a. Nilai maksimum fungsi adalah $y = \ |k| + c$
b. Nilai minimum fungsi adalah $y = \ -|k| + c$
c. Amplitudo dari fungsi sama dengan |k|
d. Periode fungsi adalah $\frac{360^0}{a}$ atau $\frac{2\pi}{a}$
e. Jika $(x + \beta)$ maka fungsi $y = k\ Cos\ ax$ bergeser kekiri sejauh β
f. Jika $(x - \beta)$ maka fungsi $y = k\ Cos\ ax$ bergeser kekanan sejauh β
g. Jika konstanta c > 0, maka fungsi $y = k\ Cos\ ax$ bergeser ke atas sejauh c
h. Jika konstanta c < 0, maka fungsi $y = k\ Cos\ ax$ bergeser ke atas kebawah c
i. Grafik fungsi y = $= -k\ Cos\ a(x \pm \beta)^0$ adalah cerminan grafik fungsi y = $= k\ Cos\ a(x \pm \beta)^0$ terhadap sumbu-x

Sedangkan untuk grafik tangen untuk mendapatkan ilustrasi terkait dengan grafik fungsi tangen yang dinyatakan dalam bentuk $y = k\ Tan\ a(x \pm \beta)^0 + c$ dapat diperoleh:

a. Nilai maksimum fungsi adalah $y = \ \infty$
b. Nilai minimum fungsi adalah $y = \ -\infty$
c. Amplitudo dari fungsi sama dengan |k|
d. Periode fungsi adalah $\frac{180^0}{a}$ atau $\frac{\pi}{a}$
e. Jika $(x + \beta)$ maka fungsi $y = k\ Tan\ ax$ bergeser kekiri sejauh β
f. Jika $(x - \beta)$ maka fungsi $y = k\ Tan\ ax$ bergeser kekanan sejauh β
g. Jika konstanta c > 0, maka fungsi $y = k\ Tan\ ax$ bergeser ke atas sejauh c
h. Jika konstanta c < 0, maka fungsi $y = k\ Tan\ ax$ bergeser ke atas kebawah c
i. Grafik fungsi y = $= -k\ Tan\ a(x \pm \beta)^0$ adalah cerminan grafik fungsi y = $= k\ Tan\ a(x \pm \beta)^0$ terhadap sumbu-x

Untuk lebih memahami pembahasan di atas, perhatikan contoh-contoh soal dibawah ini.

CONTOH 1

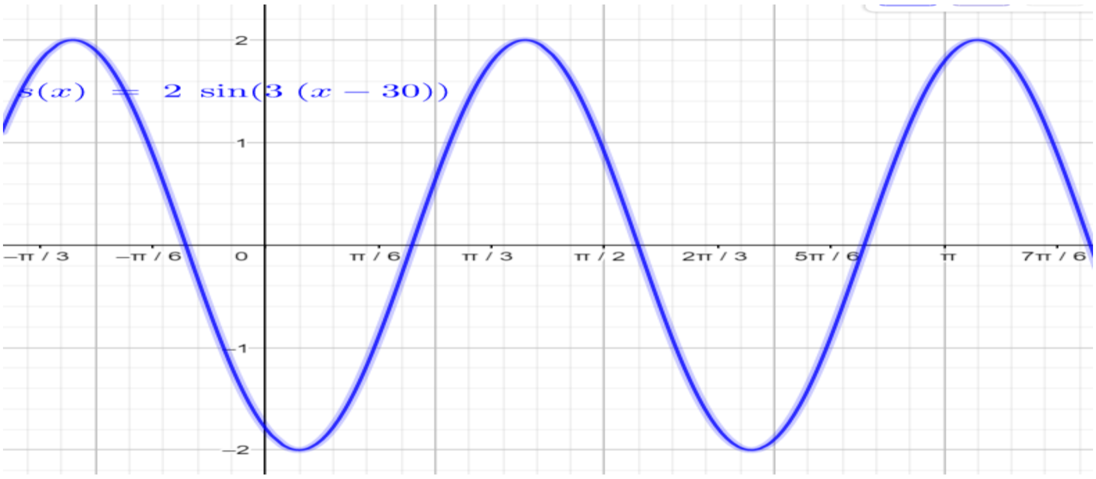
Gambarkan grafik y = 2 Sin 3(x - 30^0) untuk $0 \leq x \leq 180^0$

Jawaban:

Langkah - langkah untuk menggambar grafik y = 2 Sin 3(x - 30^0) adalah:

a. Pertama gambarlah dahulu grafik y = sin x dan y = 2 Sin 3x sebagai dasar
b. Nilai maksimum y_{max} = 2 Sin 3x = 2 (1) = 2 maka y_{max} = 2 Sin 3(x - 30^0) = 2 dan nilai y_{min} = 2 Sin 3x = 2 (-1) = -2 maka y_{min} =2 Sin 3(x - 30^0) = -2
c. Karena fungsi y = 2 Sin 3x dan y = 2 Sin 3(x - 30^0) mempunyai sudut yang sama. Maka periodenya sama dengan $\frac{360^0}{3} = \ 120^0$
d. Perhatikan kembali grafik y = sin x, dengan periode sejauh 360^0, memotong sumbu-x di titik x = 0^0, 180^0, 360^0. Maka grafik y = Sin 3x dengan periode sejauh 120^0, memotong sumbu-x di titik x = 0^0, 60^0, 120^0.

e. Berdasarkan informasi di atas, maka diperoleh grafik y = 2 Sin 3(x - 30^0) sebagai berikut:



CONTOH 2

Tentukan nilai maksimum dan minimum fungsi $y = -\frac{3}{2}\,Cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$

Jawaban:

Bentuk dasar dari fungsi trigonometri $y = -\frac{3}{2}\,Cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$ adalah bentuk $y = Cos\,x$.

a. Nilai y = cos x mempunyai nilai maksimum sama dengan 1. Maka diperoleh bahwa $y = -\frac{3}{2}\,Cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ mempunyai nilai y= $-\frac{3}{2}\,(1) = -\frac{3}{2}$.

   Maka bentuk $y = -\frac{3}{2} + 1 = -\frac{1}{2}$ → ini merupakan nilai minimum

b. Nilai y = cos x mempunyai nilai minimum sama dengan -1. Maka diperoleh bahwa $y = -\frac{3}{2}\,Cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ mempunyai nilai y= $-\frac{3}{2}\,(-1) = \frac{3}{2}$.

   Maka bentuk $y = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$ → ini merupakan nilai maksimum

C. Rangkuman

Berdasarkan bahasan di atas, maka dapat kita simpulkan sebagai berikut:

1. **Bentuk $y = k\,Sin\,a(x \pm \beta)^0 + c$ dapat diperoleh**:
   a. Nilai maksimum fungsi adalah $y = |k| + c$
   b. Nilai minimum fungsi adalah $y = -|k| + c$
   c. Amplitudo dari fungsi sama dengan |k|
   d. Periode fungsi adalah $\frac{360^0}{a}$ atau $\frac{2\pi}{a}$
   e. Jika $(x + \beta)$ maka fungsi $y = k\,Sin\,ax$ bergeser kekiri sejauh β
   f. Jika $(x - \beta)$ maka fungsi $y = k\,Sin\,ax$ bergeser kekanan sejauh β
   g. Jika konstanta c > 0, maka fungsi $y = k\,Sin\,ax$ bergeser ke atas sejauh c
   h. Jika konstanta c < 0, maka fungsi $y = k\,Sin\,ax$ bergeser ke atas kebawah c
   i. Grafik fungsi y = $= -k\,Sin\,a(x \pm \beta)^0$ adalah cerminan grafik fungsi y = $= k\,Sin\,a(x \pm \beta)^0$ terhadap sumbu-x