KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
Aturan Sinus

A. Tujuan Pembelajaran

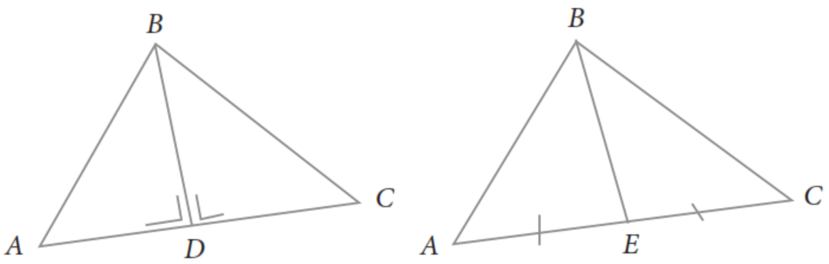
Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini kalian diharapkan:
1. Mampu menjelaskan aturan sinus dengan benar
2. Mampu menyelesaikan aturan sinus dengan benar
3. Mampu menggunakan Aturan Sinus untuk menyelesaikan masalah kontekstual

B. Uraian Materi

Pada bahasan kali ini, kita akan menemukan rumus-rumus trigonometri yang berlaku pada sembarang segitiga. Dalam sebuah segitiga sembarang maka yang menjadi permasalahan utama adalah menentukan panjang sisi dan besar sudut segitiga. Jika hanya sebuah panjang sebuah segitiga diketahui, apakah kita dapat menentukan panjang sisi-sisi yang lainnya? Atau apakah kita dapat menentukanbesar sudutnya? Sebaliknya, jika hanya sebuah sudut segitiga yang diketahui, apakah kita dapat menentukan besar sudut-sudut yang lain dan panjang sisi-sisinya?

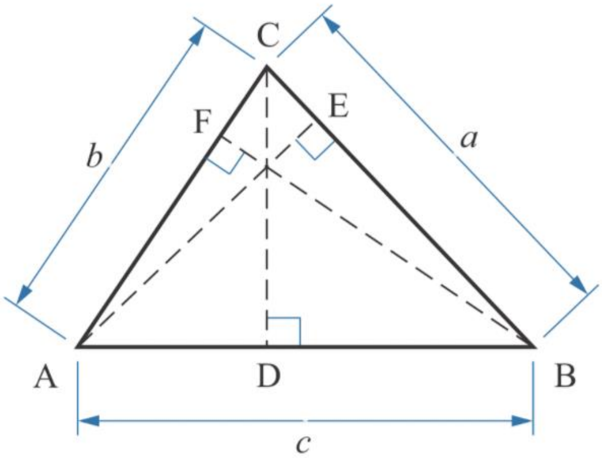
Pada materi sebelumnya kita telah mempelajari bahwa dalam sebuah segitiga siku-siku sembarang kita dapat menentukan perbandingan trigonometrinya. Dengan mudah kita dapat menetukan nilai sinus, Cosinus dan perbandingan trigonometri lainnya. Pertanyaan akan muncul bagaimana jika menggunakan konsep perbandingan trigonometri tersebut pada suatu segitiga sama kaki, segitiga sam asisi atau bahkan segitiga sembarang? Untuk menjawab pertanyaan tersebut maka ingatlah kembali konsep yang pernah kita ketahui sebelumnya terkait dengan garis tinggi dan garis berat sebuah segitiga sembarang.

Perhatikan gambar berikut:



Ingat kembali bahwa pada setiap segitiga sembarang, diperoleh bahwa garis tinggi adalah suatu garis yang dibentuk dari suatu sudut dan berpotongan tegak lurus dengan sisi dihadapannya. Maka pada gambar di atas diperoleh bahwa BD merupakan salah satu garis tinggi dari segitiga ABC. Sedangkan garis berat adalah suatu garis yang dibentuk dari suatu sudut dan memotong sisi dihadapannya menjadi dua bagian sama panjang. Maka pada gambar diatas, BE adalah garis berat segitiga ABC.

Perhatikan gambar dibawah ini!



Misalkan ABC adalah segitiga sembarang dengan panjang AB, BC dan AC masing-masing adalah c satuan, a satuan dan b satuan. Garia AE, BF dan CD masing-masing adalah garis tinggi segitiga ABC yang dibentuk dari ∠A, ∠B dan ∠C.

Perhatikan!

a. Segitiga siku-siku ACD dengan AD ⊥ CD.
   Maka dengan perbandingan trigonometri diperoleh bahwa:
   $Sin\ A = \frac{CD}{AC}$
   CD = AC Sin A atau CD = b Sin A persamaan (1)
b. Segitiga siku-siku BCD dengan BD ⊥ CD.
   Maka dengan perbandingan trigonometri diperoleh bahwa:
   $Sin\ B = \frac{CD}{BC}$
   CD = BC Sin B atau CD = a Sin B persamaan (2)

   Dari persamaan (1) dan (2) maka diperoleh bahwa:
   CD = b Sin A dan CD = a Sin B, maka
   b Sin A = a Sin B atau dapat dituliskan sebagai:
   $\frac{a}{Sin\ A} = \frac{b}{Sin\ B}$ persamaan (3)

c. Segitiga siku-siku ABE dengan AE ⊥ EB.
   Maka dengan perbandingan trigonometri diperoleh bahwa:
   $Sin\ C = \frac{AE}{AB}$
   AE = AB Sin B atau AE = c Sin B persamaan (4)
d. Segitiga siku-siku ACE dengan AE ⊥ CE.
   Maka dengan perbandingan trigonometri diperoleh bahwa:
   $Sin\ C = \frac{AE}{AC}$
   AE = AC Sin C atau AE = b Sin C persamaan (5)

   Dari persamaan (4) dan (5) maka diperoleh bahwa:
   AE = c Sin B dan AE = b Sin C, maka
   c Sin B = b Sin C atau dapat dituliskan sebagai:
   $\frac{c}{Sin\ C} = \frac{b}{Sin\ B}$ persamaan (6)

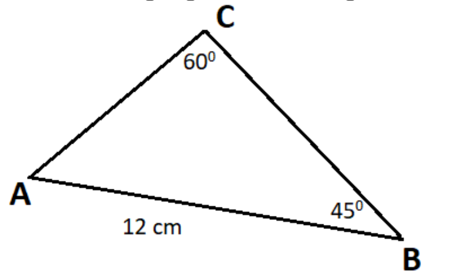
Berdasarkan persamaan (3) dan (6) maka diperoleh bahwa:

$$\boxed{\frac{a}{Sin\ A} = \frac{b}{Sin\ B} = \frac{c}{Sin\ C}}$$

Persamaan diatas disebut dengan **Aturan Sinus**

Contoh 1.

Diberikan segitiga sembarang ABC seperti pada gambar dibawah ini!



Tentukan panjang sisi AC?

Jawab:
Jika panjang sisi AB = c = 12 cm, dan sisi AC = b cm maka diperoleh bahwa

$$\frac{b}{Sin\ B} = \frac{c}{Sin\ C}$$

$$\frac{b}{Sin\ 45^0} = \frac{12}{Sin\ 60^0}$$

$$b = \frac{12\ Sin\ 45^0}{Sin\ 60^0} = \frac{12.\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Ingat!
Bentuk irrasional, maka harus diubah dengan mengalikan dengan sekawannya

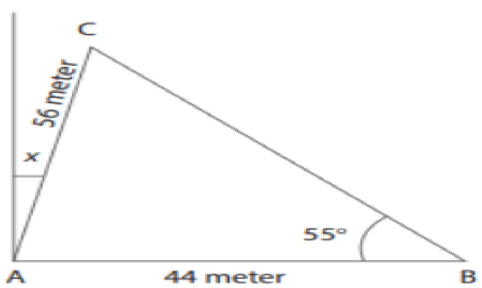
Maka bentuk diatas akan menjadi

$$b = \frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{2}\,\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{6}}{3} = 4\sqrt{6}$$

Maka panjang AC = b = $4\sqrt{6}$ cm

Contoh 2.
Pada awalnya, Menara Pisa dibangun dengan ketinggian 56 m. Ternyata, tanah di lokasi pembangunan menara rentan akan kerapuhan, sehingga terjadi kemiringan. Pada jarak 44 m dari dasar menara diperoleh sudut elevasi 55^0, tentukan derajat kemiringan menara dari posisi awalnya!

Jawab:
Permasalahan di atas dapat kita ilustrasikan seperti pada gambar dibawah ini!



Kita dapat menggunakan aturan sinus untuk menyelesaikan permasalahan di atas.
Dari ilustrasi di atas maka diperoleh bahwa:

$$\frac{AB}{Sin\ C} = \frac{AC}{Sin\ B}$$

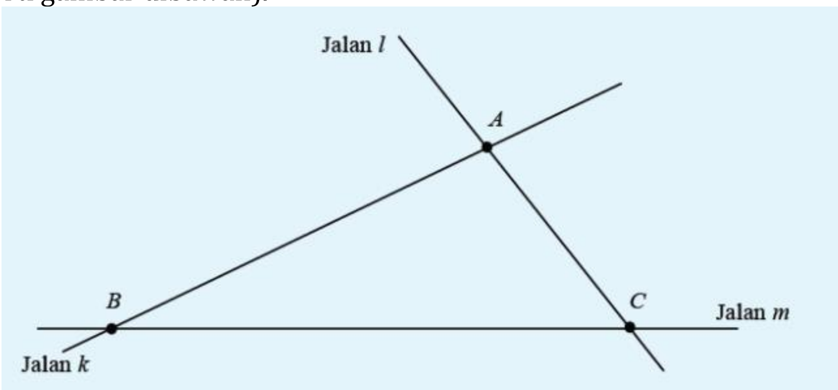
maka

$$\frac{44}{Sin\ C} = \frac{56}{Sin\ 55^0}$$ maka diperoleh bahwa:

$$Sin\ C\ = \frac{44.Sin\ 55^0}{56} = 0{,}6436$$

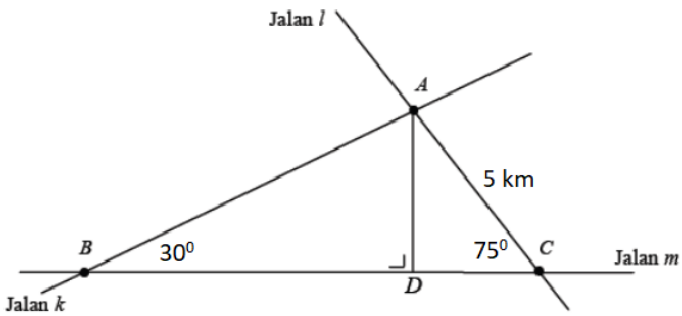
Dengan menggunakan kalkulator, maka diperoleh bahwa ∠C = 40^0.
Karena besar sudut dalam sebuah segitiga adalah 90^0 maka
∠C = 180^0 – (∠B + ∠C) = 180^0 - 95^0 = 85^0.
Sehingga kemiringan Menara Pisa = 90^0 – 85^0 = 5^0

Contoh 3.
Jalan K dan jalan L berpotongan di kota A. Dinas tata kota ingin untuk menghubungkan Kota B dengan Kota C dengan membangun jalan M yang memotong kedua jalan yang ada (seperti gambar dibawah).



Jarak antara Kota A dan Kota C adalah 5 km, dan sudut yang dibentuk oleh jalan M dan jalan L sebesar 75^0 sedangkan sudut yang dibentuk oleh jalan K dan jalan M adalah 30^0.
Tentukan jarak kota A dan Kota B!

Jawab:
Berdasarkan ilustrasi gambar di atas, maka buatlah garis tinggi segitiga ABC dari A.



Dengan menggunakan aturan segitiga, maka diperoleh bahwa:

$$\frac{AB}{Sin\ C} = \frac{AC}{Sin\ B} \text{ atau } AB = \frac{AC\ Sin\ C}{Sin\ B}$$

$$AB = \frac{5\ .Sin\ 75^0}{\frac{1}{2}} = \frac{5\ .0{,}965}{\frac{1}{2}} = 10\ .0{,}965 = 9{,}65$$

Jadi jarak antara Kota A dan Kota B adalah 9,65 km.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2

Aturan Cosinus dan Luas Segitiga

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 2 ini diharapkan siswa:

1. Mampu menjelaskan aturan cosinus dengan benar
2. Mampu menjelaskan penyelesaian aturan cosinus dengan benar
3. Mampu menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan aturan cosinus dengan benar
4. Mampu menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan aturan Luas Segitiga dengan benar

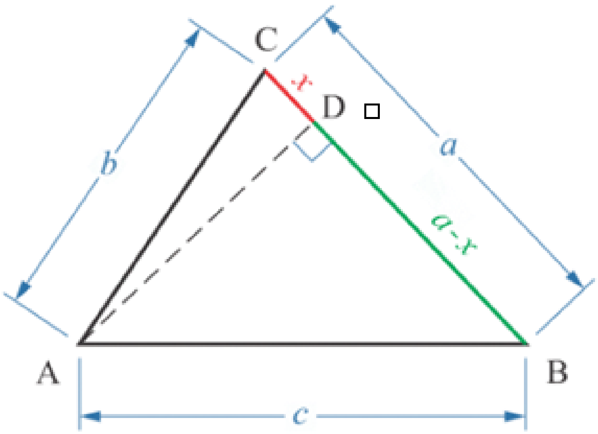
B. Uraian Materi

1. Aturan Cosinus

Aturan cosinus adalah salah aturan dalam trigonometri yang menjelaskan hubungan antara kuadrat panjang sisi dengan nilai cosinus dari salah satu sudut dalam sebuah segitiga. Aturan cosinus digunakan untuk menentukan besar salah satu sudut segitiga saat tiga sisi segitiga diketahui. Selain itu aturan cosinus dapat pula digunakan untuk menentukan salah satu sisi segitiga saat diketahui dua sisi dan sudut apitnya. Pembuktian rumus aturan cosinus dapat dilihat dari uraian dibawah ini.

Perhatikan gambar dibawah ini!

Misalkan panjang AB = c cm, BC = a cm, dan AC = b cm. Jika panjang CD = x cm, maka panjang BD = (a – x) cm.



a) Perhatikan segitiga ACD dimana AD tegak lurus CD.
Maka dengan menggunakan Teorema Phytagoras diperoleh bahwa:
$AD^2 = AC^2 - CD^2$ atau $AD^2 = b^2 - x^2$ persamaan (1)
Ingatlah kembali bahwa:
$Cos\ C = \frac{CD}{AC} = \frac{x}{b}$ atau $x = b\ Cos\ C$ persamaan (2)

Perhatikan segitiga ABD dimana AD tegak lurus BD.
Maka dengan menggunakan Teorema Phytagoras diperoleh bahwa:
$AD^2 = AB^2 - BD^2$ atau $AD^2 = c^2 - (a - x)^2$ persamaan (3)

Berdasarkan persamaan (1) dan (3) maka diperoleh bahwa:

$c^2 - (a - x)^2 = b^2 - x^2$
$c^2 - (a^2 - 2ax + x^2) = b^2 - x^2$
$c^2 - a^2 + 2ax - x^2 = b^2 - x^2$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ax$ persamaan (4)

Substitusikan persamaan (2) ke (4) maka diperoleh:
$c^2 = a^2 + b^2 - 2a(x)$

$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ Cos\ C}$

Dengan cara sama seperti di atas, dengan membuat garis tinggi dari masing-masing tiitk sudut yang lainnya yaitu ∠C dan ∠B maka akan diperoleh aturan cosinus untuk sisi-sisi yang lain sebagai berikut:

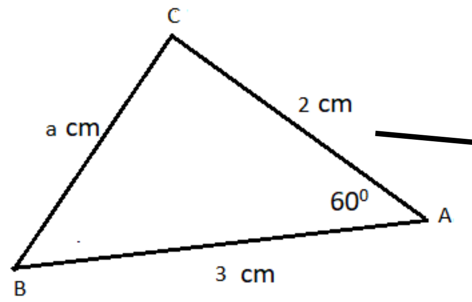
$\boxed{a^2 = c^2 + b^2 - 2bc\ Cos\ A}$ dan $\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ Cos\ C}$

Cobalah untuk membuktikan dengan mengikuti langkah seperti nomor 1!

Untuk lebih kalian memahami Aturan Cosinus, maka perhatikan beberapa contoh berikut ini

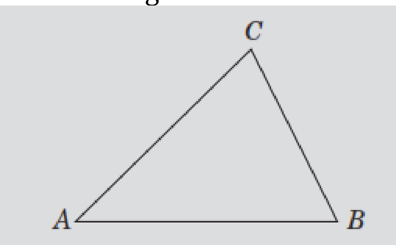
Contoh 1.
Diketahui segitiga ABC dengan panjang b = 2 cm, c = 3 cm dan ∠A = 60^0. Maka tentukan panjang sisi a?

Jawaban:
Perhatikan ilustrasi berikut:



Dengan menggunakan Aturan Cosinus maka diperoleh:
$a^2 = 2^2 + 3^2 - 2.2.3.Cos\ 60^0$
$a^2 = 4 + 9 - 2.2.3.\frac{1}{2}$
$a^2 = 13 - 6$
Maka a = $\sqrt{7}$

Contoh 2.
Perhatikan gambar dibawah ini!



Titik A dan C merupakan titik-titik ujung sebuah terowongan yang dilihat dari titik B dan besar sudut penglihatan ∠CBA = 60^0. Jika panjang AB = 2x meter dan BC = $\frac{3x}{2}$ meter, maka tentukan panjang terowongan?

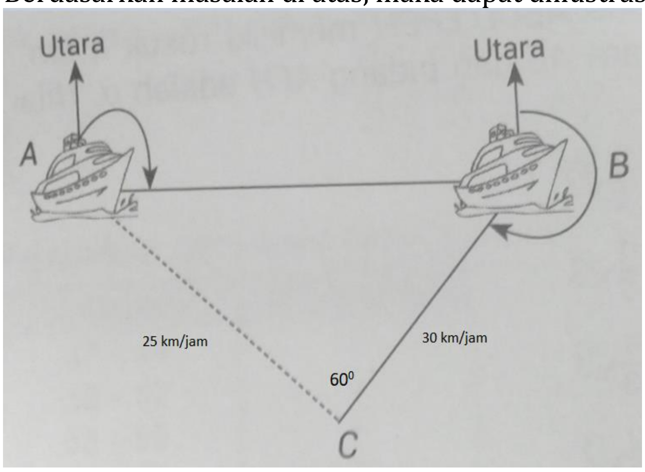
Jawaban:
Melihat ilustrasi diatas, maka masalah tersebut dapat diselesaikan dengan menggunakan Aturan Cosinus. Mengapa?
Karena dari informasi yang diberikan diketahui 2 sisi apit dan 1 sudut yang diapit oleg 2 sisi tersebut.
Sehingga dapat diperoleh bahwa:

$$AC^2 = (2x)^2 + \left(\frac{3x}{2}\right)^2 - 2.2x.\frac{3x}{x}.Cos\ 60^0$$
$$= 4x^2 + \left(\frac{9x}{4}\right)^2 - 3x^2$$
$$= \frac{13}{4}x^2$$

Maka panjang terowongan adalah AC = $\frac{1}{2}\sqrt{13}x$

Contoh 3.
Dua buah kapal tanker berangkat dari titik yang sama dengan arah berbeda sehingga membentuk sudut 60^0. Kapal pertama bergerak dengan kecepatan 30 km/jam dan kapal kedua bergerak dengan kecepatan 25 km/jam. Tentukan jarak kedua kapal setelah berlayar selama 2 jam perjalanan?

Jawaban:
Berdasarkan masalah di atas, maka dapat diilustrasikan sebagai berikut:



Misalkan kapal A dan B secara Bersama-samma bergerak dari titik C dan berlayar dengan membentuk sudut sebesar 60^0. Kapak A mempunyai kecepatan 30 km/jam dan kapal B mempunyai kecepatan 25 km/jam.

Kapal A dan B telah berlayar selama 2 jam, maka dengan menggunakan rumus bahwa s = v x t , dengan v adalah kecepatan dan t adalah lamanya kapal berlayar, maka jarak yang telah ditempuh oleh kapal A adalah:
S_A = 30 km/jam x 2 jam = 60 km
S_B = 25 km/jam x 2 jam = 50 km

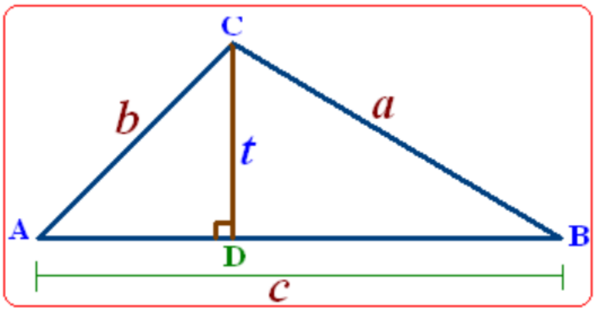
Jarak antara kapal A dan B setelah 2 jam berlayar dapat ditentukan dengan menggunakan Aturan Cosinus:
Misalkan jarak antara kapal A dan B setelah berlayar selama 2 jam adalah AB, maka

$$AB^2 = (60)^2 + (50)^2 - 2..60.50\ Cos\ 60^0$$
$$= 3600 + 2500 - 3000$$
$$= 3100$$

Sehingga jarak antara kapal A dan B adalah $10\sqrt{31}$ km

b) Aturan Luas Segitiga

Perhatikan segitiga dibawah ini!



Perhatikan segitiga ACD.

Maka diperoleh bahwa $Sin\ A = \frac{t}{b}$ maka diperoleh bahwa t = b Sin A

Luas Segitiga dapat diperoleh dari:

Luas Segitiga ABC $= \frac{1}{2}$ x Alas x Tinggi $= \frac{1}{2}\ AB\ x\ CD = \frac{1}{2}\ x\ c\ x\ b\ Sin\ A$

Maka diperoleh bahwa:

Luas Segitiga ABC $= \frac{1}{2}\ x\ c\ x\ b\ Sin\ A$

Perhatikan segitiga DBC.

Maka diperoleh bahwa $Sin\ \boldsymbol{B} = \frac{t}{a}$ maka diperoleh bahwa t = a Sin B

Luas Segitiga dapat diperoleh dari:

Luas Segitiga ABC $= \frac{1}{2}$ x Alas x Tinggi $= \frac{1}{2}\ AB\ x\ CD = \frac{1}{2}\ x\ c\ x\ a\ Sin\ B$

Maka diperoleh bahwa:

Luas Segitiga ABC $= \frac{1}{2}\ x\ c\ x\ a\ Sin\ B$

Dengan cara yang sama maka kita bisa peroleh juga bahwa:

Apakah kalian bisa mendapatkannya secara mandiri?

Luas Segitiga ABC $= \frac{1}{2}\ x\ a\ x\ b\ Sin\ C$

Contoh 1.

Diberikan segitiga ABC dengan panjang AC = 6 cm, BC = 8 cm dan besar sudut C sebesar 30^0. Luas segitiga ABC adalah….

Jawab.

Luas Segitiga ABC $= \frac{1}{2}.AC\ .BC\ Sin\ A = \frac{1}{2}\ 6\ x\ 8\ x\ Sin\ 30^0 = \frac{1}{2}\ x\ 6\ x\ 8\ x\ \frac{1}{2} = 12\ cm^2$