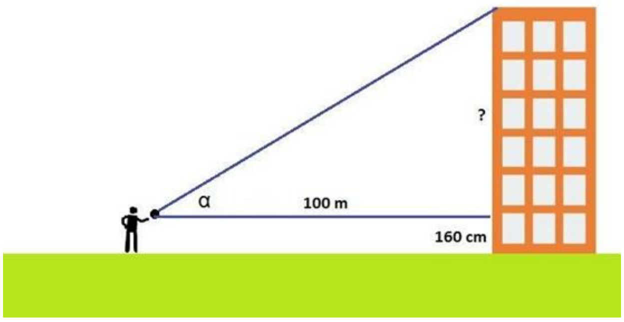
KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
Ukuran Sudut dan Konsep Dasar Sudut

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini diharapkan Kalian dapat:
1. Memahami satuan ukuran sudut dalam radian dan derajat,
2. Mengubah satuan ukuran sudut dari bentuk radian ke bentuk derajat dan sebaliknya.

B. Uraian Materi



Gambar : Pengukuran tinggi gedung
Sumber : https://images.app.goo.gl/AQcHMTjeBkfogGEy6hbcwX8

Pernahkah Kalian melihat seorang sedang mengukur jalan yang akan diperbaiki atau mengukur ketinggian sebuah gedung? Tahukah kalian bagaimana seorang Nakhoda kapal memperkirakan jarak antara kapal dengan pelabuhan atau pantai atau dengan kapal lain sehingga kapalnya tidak bertabrakan? Bagaimana seorang ahli kelautan mengukur kedalaman Samudra, ketinggian ombak atau seorang Astronom mengukur jarak bintang? Para ahli tersebut bekerja menggunakan perhitungan Trigonometri. Aktivitas pengukuran tersebut hanya sebagian dari penerapan trigonometri dalam kehidupan nyata.

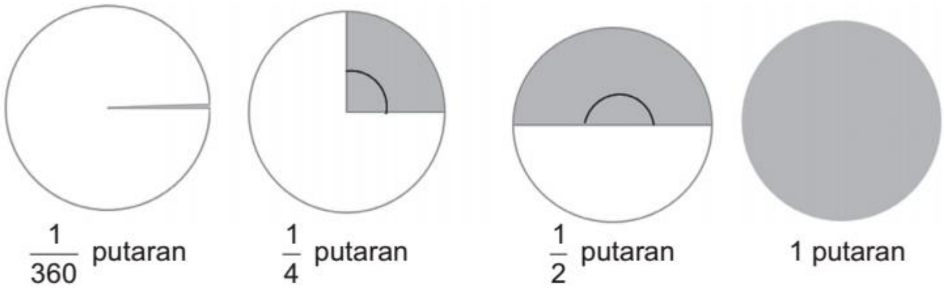
Secara sederhana, menggunakan trigonometri berarti melakukan penghitungan yang berkaitan dengan sudut. Trigonometri sering digunakan oleh surveyor, astronot, ilmuwan, enginer, bahkan juga digunakan untuk kegiatan investigasi. Dalam bidang fisika, teknik, dan kedokteran, trigonometri mengambil peranan penting dalam pengembang teknologi kedokteran dan teori-teori fisika dan teknik. Dalam Matematika, trigonometri digunakan untuk menemukan relasi antara sisi dari sudut pada suatu segitiga.

Setelah membaca paparan di atas, Kalian bisa mengetahui betapa luasnya penggunaan Trigonometri dalam kehiduapan nyata. Bagaimana, menarikkan? Mudah-mudahan Kalian termotivasi untuk mempelajari lebih dalam Trigonometri, khususnya belajar matematika sebagai tarunya ilmu pengetahuan.

Ukuran Sudut (Derajat dan Radian)

Sesuatu yang bisa diukur itu memiliki satuan ukuran untuk mengukurnya. Begitu pula dengan sudut. Satuan sudut yang paling sering kita temui dan dipergunakan adalah derajat (dilambangkan dengan "º"). Namun, ada satuan lain yang dapat digunakan untuk mengukur satuan sudut, yaitu satuan radian (dilambangkan dengan "rad").

Kalian pasti masih ingat pelajaran waktu SMP bahwa besar sudut dalam satu putaran penuh adalah 360^0 atau 1^0 didefinisikan sebagai besar sudut yang dibentuk oleh $\frac{1}{360}$ putaran penuh.
Satuan derajat ini berasal dari peradaban manusia yang mengaitkannya dengan musim yang dipengaruhi oleh perputaran bumi terhadap matahari. Dalam 1 (satu) kali revolusi bumi menyelesaikannya dalam 360 hari.
Coba Kalian cermati gambar berikut:



Gambar 1.1

Dari gambar 1.1 didapat besar sudut berikut:

$$\frac{1}{360}\text{ putaran} = \frac{1}{360}.360^0 = 1^0$$

$$\frac{1}{4}\text{ putaran} = \frac{1}{4}.\ 360^0 = 90^0$$

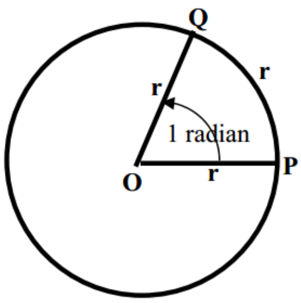
$$\frac{1}{2}\text{ putaran} = \frac{1}{2}.\ 360^0 = 180^0$$

$$\frac{1}{12}\text{ putaran} = \frac{1}{12}.\ 360^0 = 30^0$$

$$\frac{1}{8}\text{ putaran} = \frac{1}{8}.\ 360^0 = 45^0$$

Kalian dapat mendeskripsikan beberapa satuan putaran yang lain.

Selain ukuran derajat, kita juga mengenal ukuran radian. satu radian atau 1 rad adalah besarnya sudut yang dibentuk oleh dua buah jari-jari lingkaran berjari-jari r dan membentuk busur sepanjang r juga atau besar sudut pusat dari suatu lingkaran yang panjang busur dihadapan sudut tersebut adalah sama dengan jari-jari lingkaran tersebut. Panjang busur suatu lingkaran dapat dihitung langsung dengan mengalikan besarnya sudut dengan jari-jari lingkaran, apabila besarnya sudut telah dalam satuan radian.



Gambar 1.2

Dari gambar di atas,

$$\text{Besar sudut POQ} = \frac{\text{Panjang busur PQ}}{\text{r}}\ \text{radian}$$
$$= \frac{\text{r}}{\text{r}}\ \text{radian}$$
$$= 1\ \text{radian}$$

Hubungan satuan derajat dengan satuan radian adalah bahwa satu putaran penuh sama dengan 2π radian. Untuk lebih jelasnya, dapat kita lihat seperti di bawah ini.

Satu putaran penuh = 360^0 = 2π radian

$\frac{1}{2}$ putaran $= \frac{1}{2} \times 360^0 = 180^0 = \frac{1}{2} \times 2\pi\ radian = \pi\ radian$

$\frac{1}{360}$ putaran $= \frac{1}{360} \times 360^0 = 1^0 = \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}\ radian$

Maka didapat $1\ rad = \frac{180}{\pi} 1^0 \approx 57,3^0$

Coba Kalian perhatikan hubungan secara Aljabar antara derajat dengan Radian berikut:

$$\frac{1}{4}\text{putaran} = \frac{1}{4} \times 360° = 90° \Leftrightarrow 90° = 90 \times \frac{\pi}{180} rad = \frac{1}{4}\pi\ rad$$
$$\frac{1}{3}\text{putaran} = \frac{1}{3} \times 360° = 120° \Leftrightarrow 120° = 120 \times \frac{\pi}{180} rad = \frac{1}{3}\pi\ rad$$
$$\frac{1}{2}\text{putaran} = \frac{1}{2} \times 360° = 180° \Leftrightarrow 180° = 180 \times \frac{\pi}{180} rad = \frac{1}{2}\pi\ rad$$
$$\frac{2}{3}\text{putaran} = \frac{2}{3} \times 360° = 240° \Leftrightarrow 240° = 240 \times \frac{\pi}{180} rad = \frac{2}{3}\pi\ rad$$
$$\frac{3}{4}\text{putaran} = \frac{3}{4} \times 360° = 270° \Leftrightarrow 270° = 270 \times \frac{\pi}{180} rad = \frac{3}{4}\pi\ rad$$

Tentunya dengan mudah kalian mampu mengubah ukuran sudut yang lain.
Untuk lebih memahami masalah hubungan antara derajat dengan radian, coba Kalian perhatikan contoh-contoh berikut:

Contoh 1 :

Selesaikan soal-soal ukuran sudut berikut:

1. $\frac{1}{4}\pi$ rad = ...putaran = ...^{0}
2. $\frac{1}{10}$ putaran =...rad =...^{0}
3. 135^0 = ...rad = ... putaran
4. Berapa radian sudut yang dibentuk jarum jam pada pukul 11.00?

Jawab:

1. 1 putaran = 360^0 = 2π rad, jadi $\frac{1}{2}$ putaran = 180^0 = π. Oleh karena itu $\frac{1}{4}\pi$ rad = $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$ putaran = $\frac{1}{8}$ putaran = $\frac{1}{8} \times 360^0 = 45^0$.
2. Karena 1 putaran = 2π rad, maka $\frac{1}{10} \times 2\pi$ rad. = $\frac{1}{5}\pi$ rad = $\frac{1}{5} \times 180^0 = 36^0$

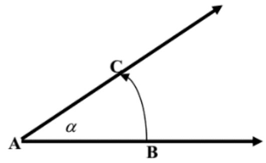
3. $135 = 135 \times \frac{\pi}{180}$ rad = $\frac{3}{4}\pi$ rad = $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2}$ putaran = $\frac{3}{8}$ putaran
4. Sudut yang terbentuk pada pukul 11.00 adalah 30^0. Jadi $30^0 = 30 \times \frac{\pi}{180}$ rad = $\frac{1}{6}\pi$ rad.

Konsep Dasar Sudut

Kalian sudah sering mendengar kata "sudut". Sebenarnya apa yang dimaksud dengan sudut? Untuk memahami masalah sudut, coba Kalian lakukan Langkah-langkah berikut:

1. Lukis sinar garis (misal sinar AB)
2. Putar sinar AB dengan pusat A sampai terjadi sinar garis AC, sehingga terbentuk sudut BAC
3. Beri nama sudut BAC = α

Dari proses tersebut Kalian telah membuat sudut $\angle BAC$ seperti tampak pada gambar.



Dalam kajian geometris, sudut didefnisikan sebagai hasil rotasi dari sisi awal (*initial side*) ke sisi akhir (*terminal side*). Selain itu, arah putaran memiliki makna dalam sudut. Suatu sudut bertanda *"positif"* jika arah putarannya berlawanan dengan arah putaran jarum jam, dan bertanda *"negatif"* jika arah putarannya searah dengan jarum jam. Arah putaran untuk membentuk sudut juga dapat diperhatikan pada posisi sisi akhir terhadap sisi awal. Untuk memudahkannya, mari kita cermati deskripsi berikut ini.

a. Sudut bertanda positif

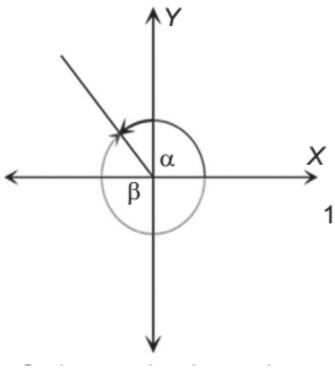
b. Sudut bertanda negatif

Gambar 1.3 Sudut berdasarkan arah putaran.

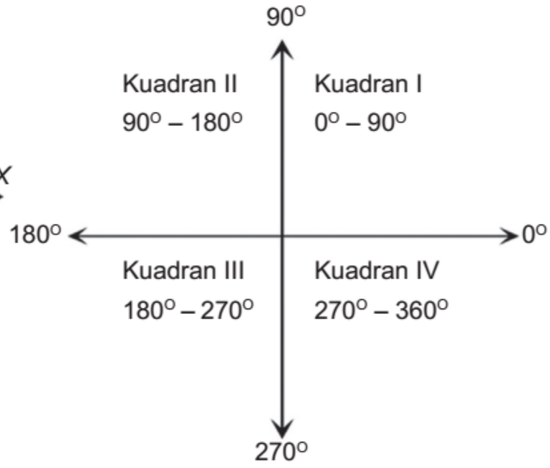
Dalam bidang koordinat kartesius, jika sisi awal suatu garis berimpit dengan sumbu x dan sisi terminalnya terletak pada salah satu kuadran pada koordinat kartesius itu, disebut sudut *standar* (baku). Jika sisi akhir berada pada salah satu sumbu pada koordinat tersebut, sudut yang seperti ini disebut pembatas kuadran, yaitu 0°, 90°, 180°, 270° dan 360°. Sebagai catatan, bahwa untuk menyatakan suatu sudut, lazimnya digunakan huruf Yunani, seperti, α (*alpha*), β (*betha*), γ (*gamma*), dan θ (*tetha*), dan juga digunakan huruf-huruf kapital, seperti A, B, C, dan D.

Cermati gambar di bawah ini.

Jika sudut yang dihasilkan sebesar α (sudut standar), maka sudut β disebut sebagai sudut koterminal, sehingga $\alpha + \beta = 360^0$, seperti gambar berikut.



Sudut standar dalam sudut koterminal



Besar sudut pada setiap kuadran

Definisi :

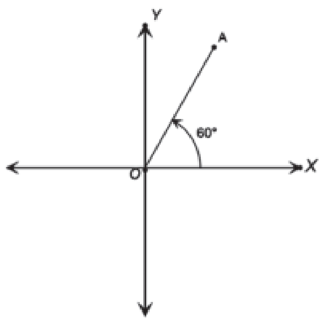
Sudut-sudut koterminal adalah dua sudut standar, memiliki sisi-sisi akhir (*terminal side*) yang berimpit.

Untuk lebih memahami, coba kalian amati contoh-contoh berikut:

Contoh 2 :
Gambarkanlah sudut-sudut standar di bawah ini, dan tentukan posisi setiap sudut pada koordinat kartesius.
a) 60° b) –45° c) 120° d) 600°

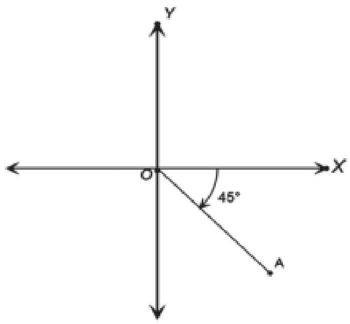
Jawab :

a.

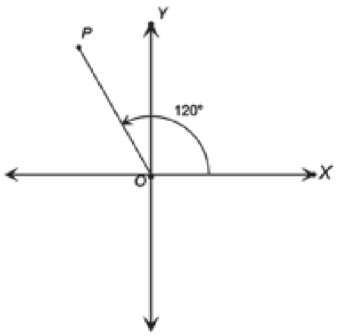


Sisi awal terletak pada sumbu X dan sisi akhir OA terletak di kuadran I

b.

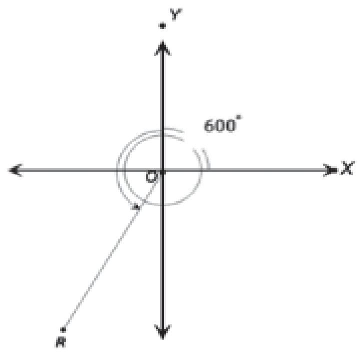


Sisi awal terletak pada sumbu X dan sisi akhir OA terletak di kuadran IV c.



Sisi awal terletak pada sumbu X dan sisi akhir OP terletak di kuadran II

d.



Sisi awal terletak pada sumbu X dan sisi akhir OR terletak di kuadran III

C. Rangkuman

1. Ada dua ukuran untuk mengukukur sudut, yaitu derajat dan radian.
2. $1^0 = \frac{1}{360}$ putaran.
3. 1 rad adalah besarnya sudut yang dibentuk oleh dua buah jari-jari lingkaran berjari-jari r dan membentuk busur sepanjang r juga.
4. Hubungan satuan derajat dengan satuan radian adalah bahwa satu putaran penuh sama dengan 2π radian.
5. $1\ rad = \frac{180}{\pi} 1^0$.
6. Sudut didefnisikan sebagai hasil rotasi dari sisi awal (*initial side*) ke sisi akhir (*terminal side*).
7. Sudut *standar* (baku) adalah sudut yang sisi awalnya berimpit dengan sumbu *x* dan sisi terminalnya terletak pada salah satu kuadran pada koordinat kartesius.
8. Sudut-sudut koterminal adalah dua sudut standar, memiliki sisi-sisi akhir (*terminal side*) yang berimpit.

D. Latihan Soal

Untuk meningkatkan pemahaman, coba Kalian kerjakan Latihan soal berikut kemudian cocokkan jawaban Kalian dengan kunci jawaban pada bagian akhir kegiatan pembelajaran. Jangan melihat kunci dulu sebelum Kalian mengerjakan.

1. Untuk setiap besar sudut di bawah ini, ubahlah ke bentuk satuan derajat dan radian.
   a. $\frac{1}{3}$ putaran
   b. $\frac{2}{5}$ putaran
   c. $\frac{3}{10}$ putaran
   d. 4 putaran

2. Nyatakanlah sudut berikut ke dalam satuan radian.
   a. 120^0
   b. 210^0

3. Nyatakan sudut berikut ke dalam bentuk derajat.
   a. $\frac{1}{3}\pi rad$
   b. $\frac{7}{9}\pi rad$
   c. $\frac{3}{4}\pi rad$
   d. $\frac{11}{12}\pi rad$

4. Berapa radian jarak putar jarum menit sebuah jam apabila ia berputar selama
   a. 45 menit
   b. 30 menit
   c. 15 menit
   d. 1 menit

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2
Rasio/Perbandingan Trigonometri Pada Segitiga Siku-Siku

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 2 ini kalian diharapkan dapat:
1. Memahami rasio/perbandingan trigonometri (sinus, cosinus, tangen, secan, cosecan dan cotangen) pada segitiga siku-siku.
2. Menghitung rasio/perbandingan trigonometri (sinus, cosinus, tangen, secan, cosecan dan cotangen) pada segitiga siku-siku.
3. Menyelesaikan masalah menggunakan rasio/perbandingan trigonometri (sinus, cosinus, tangen, cosecan, secan, dan cotangen).

B. Uraian Materi

Jika Kalian perhatikan lingkungan sekitar kita, banyak benda atau bangunan memiliki sudut atau pojok tertentu. Bentuk-bentuk sudut dari benda di alam terbentuk dengan sendirinya, seperti sudut dahan dengan ranting, lekukan batuan, dan sebagainya. Bentuk sudut ada yang sengaja dirancang seperti penggaris berbentuk segitiga, sudut antara dua ruas jalan yang bersilangan, sudut yang terbentuk antara jarum pendek dan jarum panjang dari sebuah jam dinding, bentuk permukaan buku. Model atap rumah biasanya dibuat dengan sudut atau pojok sesuai kebutuhan. Titik sudut sebuah buku biasanya tegak lurus, sedangkan atap rumah sudutnya lebih kecil.

Ilmu ukur sudut dipelajari secara khusus dalam trigonometri yang mengkaji hubungan antara sisi dan sudut dalam suatu segitiga dan sifat-sifat serta aplikasinya dalam berbagai bidang seperti penaksiran tinggi bangunan atau pohon, jarak mendatar puncak gunung terhadap lembahnya, dan sebagainya.

Pada peradaban kehidupan kita, kajian mengenai trigonometri sudah tercermin dari berbagai ikon kehidupan mereka. Misalnya, para arsitekturnya, sudah menerapkan kesetimbangan bangunan pada rumah adat yang mereka ciptakan, sebagai contoh rumah adat Dayak. Rumah adat tersebut berdiri kokoh sebagai hasil hubungan yang tepat antara besar sudut yang dikaitkan dengan panjang sisi-sisinya.

Gambar : Rumah Adat Suku Dayak.
Sumber : http://www.jualsewarumah.com

Pada pembelajaran II ini kita akan mempelajari konsep perbandingan trigonometri pada segitiga siku-siku.

Perbandingan Trigonometri Suatu Sudut Pada Segitiga Siku-Siku

Perhatikan gambar. Segitiga ABC merupakan segitiga siku-siku dengan titik sudut siku-siku di C. Panjang sisi di hadapan sudut A adalah *a* satuan, panjang sisi di hadapan sudut B adalah *b* satuan, dan panjang sisi di hadapan sudut C adalah *c* satuan.
Pada gambar, diketahui $\angle$BAC = α. Sisi BC = *a* disebut ***sisi di depan sudut*** $\boldsymbol{\alpha}$, sisi AC = *b* disebut ***sisi di samping sudut*** $\boldsymbol{\alpha}$, dan sisi AB = *c* disebut ***sisi miring*** (***hipotenusa***). Dari ketiga sisi segitiga siku-siku ABC tersebut, dapat ditentukan perbandinga-perbandingan trigonometri sebagai berikut.

Definisi : ***Perbandingan Trigonometri pada Segitiga Siku-Siku***

a. $\text{sinus } \alpha = \dfrac{\text{sisi di depan sudut } \alpha}{\text{sisi miring}} = \dfrac{a}{c}$

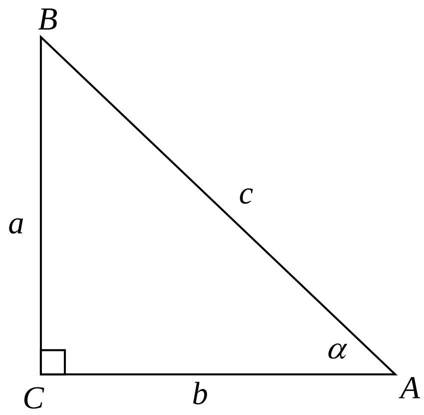
b. $\text{cosinus } \alpha = \dfrac{\text{sisi di samping sudut } \alpha}{\text{sisi miring}} = \dfrac{b}{c}$

c. $\text{tangen } \alpha = \dfrac{\text{sisi di depan sudut } \alpha}{\text{sisi di samping sudut } \alpha} = \dfrac{a}{b}$

d. $\text{cotangen } \alpha = \dfrac{\text{sisi di samping sudut } \alpha}{\text{sisi di depan sudut } \alpha} = \dfrac{b}{a}$

e. $\text{secan } \alpha = \dfrac{\text{sisi miring}}{\text{sisi di samping sudut } \alpha} = \dfrac{c}{b}$

f. $\cos ecan\ \alpha = \dfrac{\text{sisi miring}}{\text{sisi di depan sudut } \alpha} = \dfrac{c}{a}$



Catatan :
Untuk selanjutnya, penulisan ***sinus*** dan ***cosinus*** disingkat ***sin*** dan ***cos***, penulisan ***tangen*** dan ***cotangen*** disingkat ***tan*** dan ***cot***, penulisan ***secan*** dan ***cosecan*** disingkat ***sec*** dan ***cosec*** (atau ***csc***).

Berdasarkan definisi di atas, dapat diturunkan rumus-rumus dasar trigonometri berikut ini.

a. $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$

b. $\operatorname{cosec}\ \alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}$

c. $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}$

d. $tan\ \alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

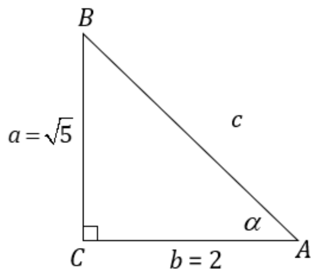
e. $\cot\ \alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

Contoh 1:
Diketahui segitiga ABC siku-siku di C dengan panjang sisi *a* = $\sqrt{5}$ satuan dan panjang sisi *b* = 2 satuan. Jika $\angle$BAC = α, tentukanlah nilai keenam perbandingan trigonometri untuk sudut α.

Jawab:
Nilai *c* dihitung dengan menggunakan teorema Pythagoras:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 2^2} = \sqrt{5+4} = \sqrt{9} = 3$$

Jadi, nilai perbandingan trigonometri sudut α adalah:



$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{5} \qquad \cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$$

$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{2}{3}$ $\qquad$ $\sec\alpha = \frac{c}{b} = \frac{3}{2}$

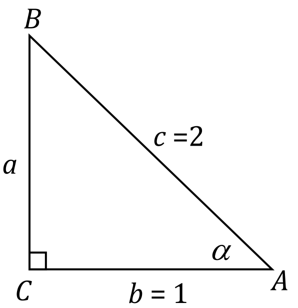
$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$ $\qquad$ $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{c}{a} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3}{5}\sqrt{5}$

Contoh 2:

Diketahui cos α^o = $\frac{1}{2}$ dan α^o sudut lancip ($0^o < \alpha^o < 90^o$). Carilah nilai perbandingan trigonometri sudut α^o yang lain.

Jawab:

Gambarlah segitiga siku-siku ABC sehingga nilai perbandingan trigonometri cos α^o = $\frac{1}{2}$



Nilai a dicari dengan menggunakan teorema Pythagoras:

$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$

Jadi, nilai perbandingan trigonometri sudut α yang lain adalah:

$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

$\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

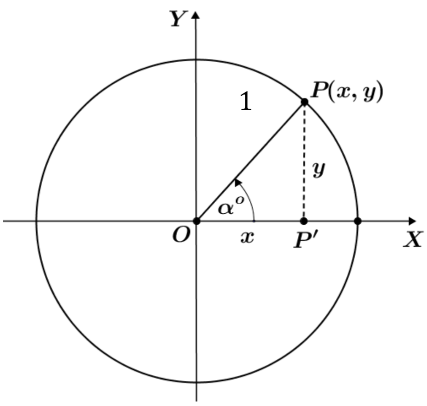
$\sec\alpha = \frac{c}{b} = \frac{2}{1} = 2$

$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{c}{a} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

Perbandingan Trigonometri Sudut-Sudut Istimewa

Sudut istimewa adalah suatu sudut di mana nilai perbandingan trigonometrinya dapat ditentukan secara langsung tanpa menggunakan daftar trigonometri atau kalkulator. Sudut-sudut yang dimaksud adalah sudut-sudut yang besarnya 0^o, 30^o, 45^o, 60^o, dan 90^o.

Nilai perbandingan trigonometri untuk sudut-sudut istimewa dapat ditentukan dengan menggunakan konsep lingkaran satuan seperti pada gambar berikut.



Berdasarkan definisi perbandingan trigonometri, diperoleh hubungan:

$\sin\alpha^o = \frac{PP'}{OP} = \frac{y}{1} = y$

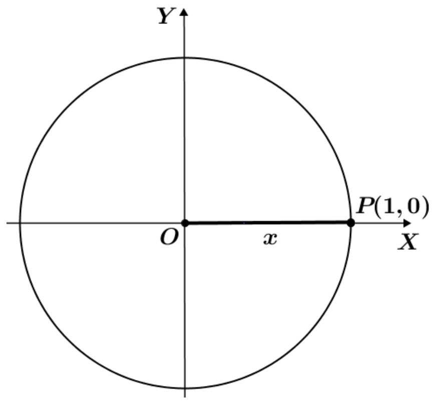
$\cos\alpha^o = \frac{OP'}{OP} = \frac{x}{1} = x$

$\tan\alpha^o = \frac{PP'}{OP'} = \frac{y}{x}$, dengan syarat $x \neq 0$.

Jadi, dalam lingkaran satuan ini koordinat titik $P(x, y)$ dapat dinyatakan sebagai $P(\cos \alpha^o, \sin \alpha^o)$.

1. Nilai Perbandingan Trigonometri untuk Sudut 0^o

Perhatikan gambar di samping. Koordinat titik *P* adalah (1, 0), sehingga (1, 0) = (cos 0^o, sin 0^o)



maka diperoleh:

sin 0^o = 0

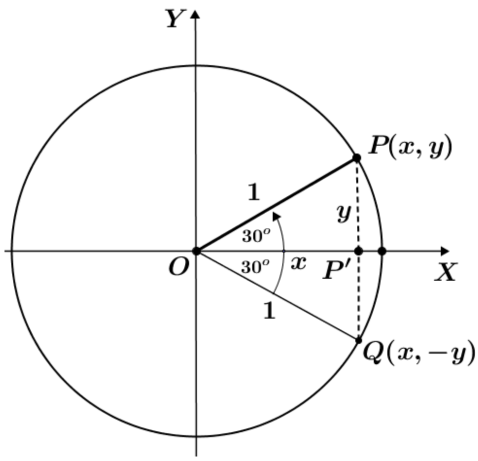
cos 0^o = 1

tan 0^o = $\dfrac{\sin 0^o}{\cos 0^o} = \dfrac{0}{1} = 0$

2. Nilai Perbandingan Trigonometri untuk Sudut 30^o

Perhatikan gambar di samping. Jika α^o = 30^o, maka $\angle$OPQ = 60^o, sehingga ΔOPQ merupakan segitiga sama sisi dengan panjang sisi OP = OQ = PQ = 1, dan PP' = QP' = $\frac{1}{2}$ atau ordinat y = $\frac{1}{2}$.

ΔOPP' siku-siku di P', dengan menggunakan teorema Pythagoras diperoleh hubungan:



$(OP')^2 + (PP')^2 = (OP)^2$

$\Leftrightarrow (OP')^2 = (OP)^2 - (PP')^2$

$\Leftrightarrow (OP')^2 = 1^2 - (\frac{1}{2})^2$

$\Leftrightarrow (OP')^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow OP' = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

OP' menyatakan absis titik P atau $x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Jadi, untuk α^o = 30^o, maka koordinat titik *P* adalah $(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ = (cos 30^o, sin 30^o), maka diperoleh:

sin 30^o = $\frac{1}{2}$,

cos 30^o = $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, dan

tan 30^o = $\dfrac{\sin 30^o}{\cos 30^o} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

3. Nilai Perbandingan Trigonometri untuk Sudut 45^o

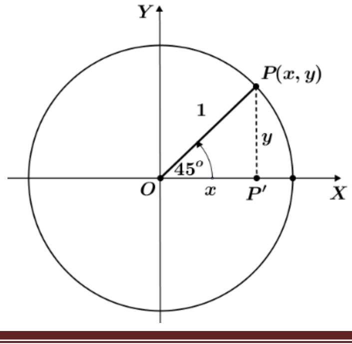
Perhatikan gambar di samping. Jika α^o = 45^o, maka ΔOPP' merupakan segitiga sama kaki dengan panjang sisi OP = PP' atau $x = y$. Dengan menggunakan teorema Pythagoras diperoleh hubungan:

$(OP')^2 + (PP')^2 = (OP)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$

$\Leftrightarrow 2x^2 = 1$

$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2}$



$\Leftrightarrow \quad x = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Karena $x = y$, maka $y = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Jadi, untuk $\alpha^o = 45^o$, maka koordinat titik P adalah $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}) = (\cos 45^o, \sin 45^o)$, maka diperoleh:

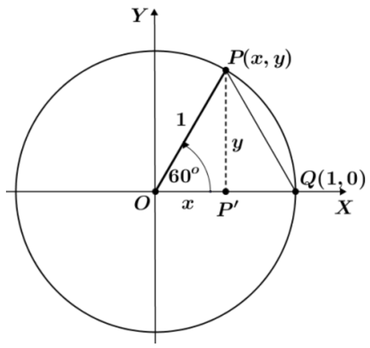
$\sin 45^o = \frac{1}{2}\sqrt{2}$,

$\cos 45^o = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, dan

$\tan 45^o = \frac{\sin 45^o}{\cos 45^o} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = 1$

4. Nilai Perbandingan Trigonometri untuk Sudut 60°

Perhatikan gambar di samping. Jika $\alpha^o = 60^o$, maka ΔOPQ merupakan segitiga sama sisi dengan panjang sisi OP = OQ = PQ = 1, dan OP' = QP' = $\frac{1}{2}$ sehingga absis $x = \frac{1}{2}$. Dengan menggunakan teorema Pythagoras diperoleh hubungan:



$(OP')^2 + (PP')^2 = (OP)^2$

$\Leftrightarrow \quad (PP')^2 = (OP)^2 - (OP')^2$

$\Leftrightarrow \quad (PP')^2 = 1^2 - (\frac{1}{2})^2$

$\Leftrightarrow \quad (PP')^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow \quad PP' = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

PP' menyatakan ordinat titik P atau $y = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Jadi, untuk $\alpha^o = 60^o$, maka koordinat titik P adalah $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}) = (\cos 60^o, \sin 60^o)$, maka diperoleh:

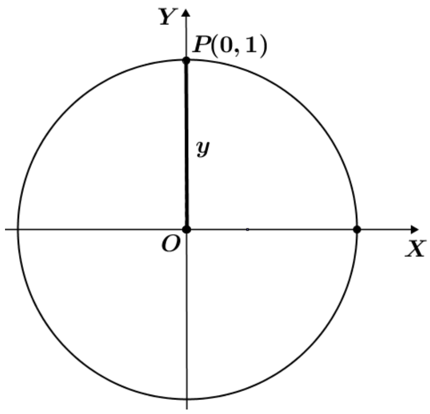
$\sin 60^o = \frac{1}{2}\sqrt{3}$,

$\cos 60^o = \frac{1}{2}$, dan

$\tan 60^o = \frac{\sin 60^o}{\cos 60^o} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

5. Nilai Perbandingan Trigonometri untuk Sudut 90°

Perhatikan gambar di samping. Jika $\alpha^o = 90^o$, maka kaki sudut OP berimpit dengan sumbu Y positif atau titik P berada pada sumbu Y positif. Koordinat titik P adalah (0, 1), sehingga (0, 1) = ($\cos 90^o$, $\sin 90^o$)



maka diperoleh:

$\sin 90^o = 1$

$\cos 90^o = 0$

$\tan 90^o =$

$\frac{\sin 90^o}{\cos 90^o} = \frac{1}{0}$ (tidak didefinisikan)

Rangkuman Nilai Perbandingan Trigonometri Sudut Istimewa

	Besar sudut α^o				
	0^o	**30^o**	**45^o**	**60^o**	**90^o**
$\sin \alpha^o$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos \alpha^o$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha^o$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\cot \alpha^o$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0
$\sec \alpha^o$	1	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2	–
$\operatorname{cosec} \alpha^o$	–	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	1

Contoh 1:

Hitunglah:

a. $\tan 30^o + \tan 45^o$

b. $\sec 0^o + \sec 45^o$

c. $\dfrac{\operatorname{cosec} 30^o + \operatorname{cosec} 90^o}{\sec 0^o + \sec 60^o}$

Jawab:

a. $\tan 30^o + \tan 45^o = \frac{1}{3}\sqrt{3} + 1 = \frac{1}{3}\left(\sqrt{3}+3\right)$

b. $\sec 0^o + \sec 45^o = \dfrac{1}{\cos 0^o} + \dfrac{1}{\cos 45^o} = \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = 1 + \dfrac{2}{\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$

c. $\dfrac{\operatorname{cosec} 30^o + \operatorname{cosec} 90^o}{\sec 0^o + \sec 60^o} = \dfrac{\dfrac{1}{\sin 30^o} + \dfrac{1}{\sin 90^o}}{\dfrac{1}{\cos 0^o} + \dfrac{1}{\cos 60^o}} = \dfrac{\dfrac{1}{\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{1}}{\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{\frac{1}{2}}} = \dfrac{2+1}{2+1} = 1$

Contoh 2:

Tunjukkan bahwa:

a. $\sin^2 45^o + \cos^2 45^o = 1$

b. $1 + \tan^2 45^o = \sec^2 45^o$

Jawab:

a. $\sin^2 45^o + \cos^2 45^o = (\frac{1}{2}\sqrt{2})^2 + (\frac{1}{2}\sqrt{2})^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

Jadi, terbukti bahwa $\sin^2 45^o + \cos^2 45^o = 1$

b. Bagian ruas kiri: $1 + \tan^2 45^o = 1 + (1)^2 = 1 + 1 = 2$

Bagian ruas kanan: $\sec^2 45^o = \dfrac{1}{\cos^2 45^o} = \dfrac{1}{(\frac{1}{2}\sqrt{2})^2} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

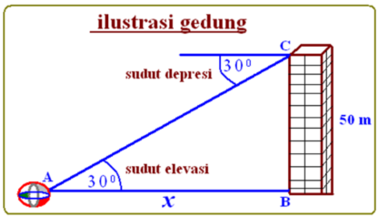
Ruas kiri = ruas kanan = 2

Jadi, terbukti bahwa $1 + \tan^2 45^o = \sec^2 45^o$

Setelah Kalian memahami perbandingan trigonometri, mari kita kembangkan pembahasan kita lebih jauh dengan menggunakan perbandingan triogonemetri dalam memecahkan masalah-masalah kontekstual. Untuk menggunakan perbandingan trigonometri dalam memecahkan masalah kontekstual, kalian perlu memperhatikan dan memahami hal-hal berikut:

Sudut depresi dan sudut elevasi

Dalam kehidupan sehari-hari, kita sering mendengar istilah "sudut elevasi" dan "sudut depresi".
Sudut elevasi adalah **sudut** yang dibentuk oleh arah horizontal dengan arah pandangan mata pengamat ke arah atas.
Sudut depresi adalah **sudut** yang dibentuk oleh arah horizontal dengan arah pandangan mata pengamat ke arah bawah.
Untuk lebih jelasnya, perhatikan gambar berikut ini.



Gambar : Sudut depresi dan sudut elevasi.
Sumber : https://images.app.goo.gl/NDb3gfmLxwL

Penerapan Trigonometri dalam Kehidupan Nyata

Banyak sekali kita jumpai berbagai hal yang terkait dengan rasio trigonometri. Rasio trigonometri dapat digunakan untuk memecahkan masalah kontekstual yang berhubungan dengan sudut pengamatan, tinggi suatu benda , atau untuk menentukan jarak ke suatu obyek. Rasio trigonometri merupakan salah satu sarana yang dapat digunakan untuk melatih penalaran dalam menyelesaikan permasalahan tersebut.

Berikut beberapa contoh penggunaan trigonometri dalam kehidupan sehari hari :

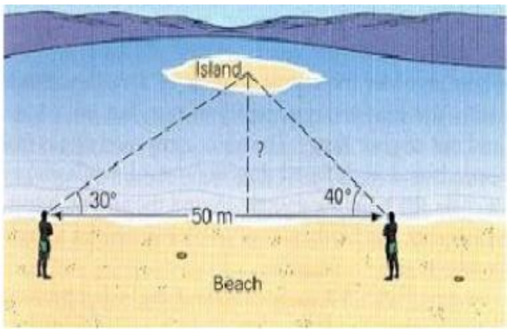
1. Menghitung tinggi bangunan / gunung / pohon/ bukit/ benda

Apabila kamu tahu jarak antara kamu dengan benda yang kamu amati dan kamu juga tahu sudut elevasi pengamatannya, maka kamu dapat menghitung tinggi dari bangunan yang kamu amati tersebut.

Gambar : Menghitung tinggi bangunan
Sumber : Modul PKB Matematika

2. Dalam navigasi

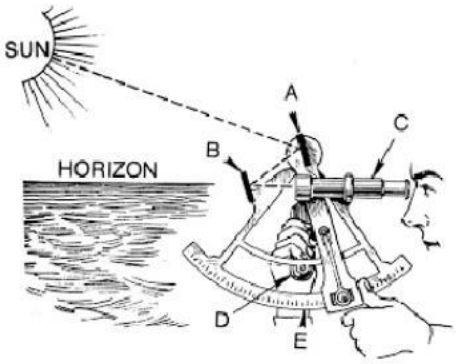
Perbandingan trigonometri dapat digunakan di bidang navigasi. Sebagai contoh, rasio trigonometri digunakan untuk menghitung jarak suatu titik terhadap garis pantai.



Gambar : Menghitung jarak suatu pulau ke bibir pantai
Sumber : Modul PKB Matematika

3. Dalam bidang oseanografi

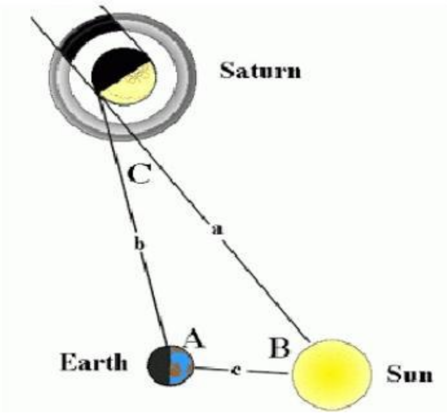
Rasio trigonometri dapat digunakan untuk menghitung ketinggian gelombang laut.



Gambar : Menghitung ketinggian gelombang laut
Sumber : Modul PKB Matematika

4. Dalam bidang astronomi

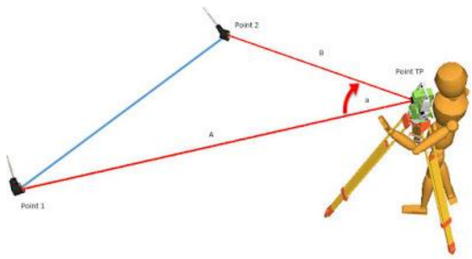
Trigonometri sangat besar manfaatnya dalam ilmu astronomi, karena ukuran benda-benda langit tidak mungkin diukur pakaipenggaris, pasti dihitung dengan bermain skala-skala dan sudut-sudut, sehingga dapat diestimasi ukurannya secara akurat. Rumus trigonometri sudut ganda digunakan untuk nilai-nilai ukuran sisi akibat sudut-sudut yang tidak istimewa.



Gambar : Menghitung ketinggian gelombang laut
Sumber : Modul PKB Matematika

5. Dalam bidang teknik sipil

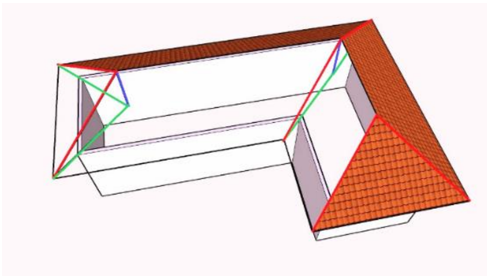
Pengukuran tanah adalah suatu cabang ilmu alam untuk menentukan posisi ruang dimensi tiga dari suatu tempat pada permukaan bumi. Hasil pengukuran tanah yang diperoleh antara lain digunakan untuk membuat peta topografi dari bumi untuk menentukan luas wilayah suatu daerah. Keahlian trigonometri seorang surveyor sangat mempermudah pekerjaannya sehingga beliau tak perlu terjun langsung ke medan-medan sulit.



Gambar : Menghitung luas tanah
Sumber : https://images.app.goo.gl/NJyTnwuvcdej534f7
https://images.app.goo.gl/qPnUiJwwHcmah7bJ9

6. Pada Bidang Arsitektur

Trigonometri bermanfaat dalam menentukan kemiringan atap, beban struktural, efek bayangan matahari dan sudut cahaya terhadap karya arsitektur.



Gambar : Menghitung luas tanah
Sumber : https://images.app.goo.gl/VgrjdSvaMjV5aQPh8

Beberapa keterampilan yang perlu kalian miliki untuk meningkatkan kemampuan memecahkan masalah adalah:

1. Memahami soal

   Pahami soal atau masalah yang diberikan, kemudian tentukan beberapa hal berikut.
   a. Menyatakan soal ke dalam bahasa sendiri
   b. Membuat diagram dari soal tersebut
   c. Menentukan apa fakta atau informasi yang diberikan
   d. Menentukan apa yang ditanyakan, apa yang diminta untuk dicari atau dibuktikan

2. Memilih pendekatan atau strategi pemecahan

   Setelah memahami soal, tentukanlah beberapa hal berikut.
   a. Memilih dan menggunakan pengetahuan aljabar yang diketahui
   b. Menentukan konsep yang relevan
   c. Menentukan atau memilih variabel yang terlibat
   d. Merumuskan model matematika atau kalimat matematika darimasalah

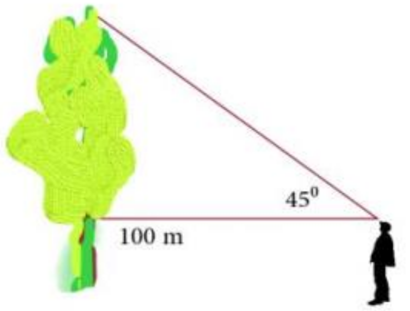
3. Menyelesaikan model
   Setelah memilih strategi penyelesaian, tentukanlah beberapa hal berikut.
   a. Tentukan jenis model matematikanya
   b. Lakukan operasi hitung atau operasi aljabar secara benar untuk mendapatkan solusi dari permasalahan yang diberikan

4. Menafsirkan solusi
   Setelah solusi atau penyelesaian dari model matematika diperoleh, selanjutnya lakukan hal berikut ini.
   a. Periksalah kelayakan atau kebenaran jawaban atau masukakalnya jawaban
   b. Solusi dari penyelesaian model matematika diterjemahkan ke dalam penyelesaian dari masalah semula

Untuk lebih memahami perhatikan contoh berikut:

Contoh 1:
Sebuah pohon berjarak 100 meter dari seorang pengamat yang tingginya 170 cm. Apabila pucuk pohon tersebut dilihat pengamat dengan sudut elevasi 60^0, tentukanlah tinggi pohon tersebut.

Penyelesaian:
- Memahami soal
  Dari soal dapat dibuatkan diagramnya sebagai berikut.

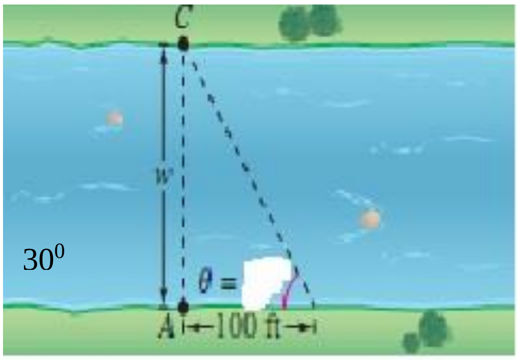


- Dari soal diketahui bahwa:
  Jarak pengamat ke pohon = 100 m
  Tinggi pengamat = 170 cm = 1,7 m
  Sudut elevasi = 45^0
  Yang dicari tinggi pohon
- Memilih pendekatan atau strategi pemecahan
  Konsep yang relevan dari soal di atas adalah perbandingan trigonometri.
  Dimisalkan bahwa t = tinggi pohon – tinggi pengamat
  x = jarak pengamat ke pohon
  $\tan 45^0 = \frac{t}{x}$
- Menyelesaikan model
  Dengan menggunakan operasi hitung, diperoleh:
  $\tan 45^0 = \frac{t}{x}$
  t = x tan 450 = 100 . 1 = 100
- Menafsirkan solusi
  Tinggi pohon = t + tinggi pengamat
  = 100 m+ 1, 7 m = 101,7 m

Jadi, tinggi pohonnya adalah 101,7 m

Contoh 2:

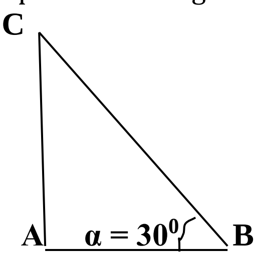
Seorang ahli Biologi ingin mengetahui lebar sebuah sungai sehingga alat yang dipasang untuk mengetahui polutan dalam air sungai dapat diatur dengan baik. Jarak dari ahli Biologi berdiri pada tempat yang akan dipasang alat di titik A adalah 100 kaki dan sudut pandang pada alat di seberang sungai, yaitu di titik C sebesar 30^0 (lihat gambar). Hitunglah lebar sungai tersebut.



Gambar 3.8.10
(Sumber : Larson, 2011)

Penyelesaian:

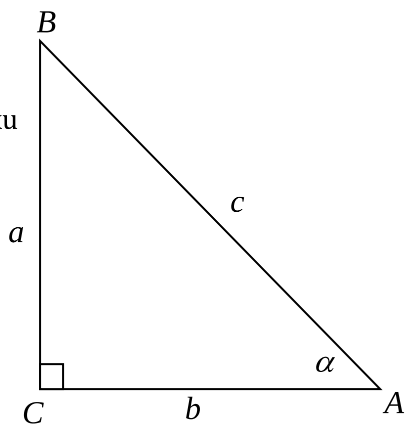
- Dari soal dapat dibuat diagramnya sebagai berikut:



- Jarak dari pengamat pada alat yang dipasang adalah 100 mkaki
  Sudut elevasi 30^0
  Yang dicari lebar sungai.
  Dimisalkan lebar sungai AC.
  $\tan\ \alpha = \frac{AC}{AB} \leftrightarrow AC = AB.tan\ \alpha$
  $AC = 100.tan\ 30^0 = 100.\frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{100}{3}\sqrt{3}$

Jadi lebar sungai adalah $\frac{100}{3}\sqrt{3}$ kaki.

C. Rangkuman



1. Definisi Perbandingan Trigonometri pada Segitiga Siku-Siku
   1. sinus $\alpha = \frac{\text{sisi di depan sudut } \alpha}{\text{sisi miring}} = \frac{a}{c}$
   2. cosinus $\alpha = \frac{\text{sisi di samping sudut } \alpha}{\text{sisi miring}} = \frac{b}{c}$
   3. tangen $\alpha = \frac{\text{sisi di depan sudut } \alpha}{\text{sisi di samping sudut } \alpha} = \frac{a}{b}$

4. $\text{cotangen } \alpha = \dfrac{\text{sisi di samping sudut } \alpha}{\text{sisi di depan sudut } \alpha} = \dfrac{b}{a}$
5. $\text{secan } \alpha = \dfrac{\text{sisi miring}}{\text{sisi di samping sudut } \alpha} = \dfrac{c}{b}$
6. $\text{cosecan } \alpha = \dfrac{\text{sisi miring}}{\text{sisi di depan sudut } \alpha} = \dfrac{c}{a}$

2. Rangkuman Nilai Perbandingan Trigonometri Sudut Istimewa

	Besar sudut α^o				
	0^o	**30^o**	**45^o**	**60^o**	**90^o**
sin α^o	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos α^o	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan α^o	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
cot α^o	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0
sec α^o	1	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2	–
cosec α^o	–	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	1

D. Latihan Soal

Untuk meningkatkan pemahaman, coba Kalian kerjakan latihan soal berikut, kemudian cocokkan jawaban Kalian dengan kunci jawaban pada bagian akhir kegiatan pembelajaran. Jangan melihat kunci dulu sebelum Kalian mengerjakan.

1. Segitiga ABC siku-siku di C. Apabila $\sin A = 0.5$, tentukan:
   a. $\cos A$ dan $\tan A$
   b. $\sec A$ dan $\cot A$
2. Diketahui segitiga ABC siku-siku di B, jika panjang AC adalah 8 cm, dan $\angle A = 30^o$. Hitunglah panjang AB dan BC.
3. Seorang anak memandang sebuah pohon dengan sudut 60^0. Apabila jarak anak tersebut 60 meter dari pohon, tentukan tinggi pohon tersebut.
4. Andi melihat sebuah sebuah menara dari jarak 150 meter dengan sudut elevasi 30^0. Jarak mata Andi dengan tanah 150 cm. Tentukan tinggi gedung tersebut!