KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
RELASI , FUNGSI DAN FUNGSI LINIER

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini diharapkan peserta didik mengenal konsep relasi, fungsi dan fungsi linear serta mampu menyelesaiakan masalah yang berkatian dengan fungsi linear.

B. Uraian Materi

Pernahkah Kalian mendatangi suatu tempat, seperti mall dan melihat tarip parkir sebagai berikut: parkir untuk mobil, satu jam pertama Rp. 4000,00 dan untuk jam berikutnya Rp. 3000,00 sehinga seorang yang memarkir mobilnya selama 3 jam harus membayar biaya parkirnya Rp. 10.000,00? Proses perhitungan parkir tersebut merupakan salah satu aplikasi fungsi dalam kehidupan sehari-hari.

Gambar 1.1 Parkir Mobil Vertikal.
Sumber: https://pixabay.com/id/photos/autos-teknologi-vw-214033/

Contoh lain penerapan fungsi adalah jarak dan kecepatan. Setiap orang yang berjalan untuk berpindah tempat dari tempat yang satu ke tempat yang lain tentu saja memiliki kecepatan. Saat berjalan, seseorang bisa mempercepat, memperlambat, bahkan berjalan dengan kecepatan tetap.

Dalam fungsi, kecepatan yang dipakai yaitu pada saat kecepatan tetap (konstan). Saat seseorang mulai berjalan, kemungkinan kecepatannya akan dipercepat atau diperlambat. Di lain pihak, tentu saja ada waktu di saat kecepatan mulai konstan. Kecepatan konstan itulah yang berlaku dalam suatu fungsi. Dengan demikian, jarak yang ditempuh pejalan tersebut yang merupakan suatu fungsi.

Contoh lain misalkan, seseorang yang akan membuat suatu area penempatan hewan peliharaan (kuda, kambing, atau ayam) sehingga membentuk suatu area yang paling luas dengan penggunaan batasan pagar yang tersedia, maka hal ini dapat menggunakan konsep yang ada pada cakupan materi fungsi kuadarat. Begitu juga permasalahan yang berkaitan dengan proyektil, yakni objek apa pun yang dilemparkan, ditembak, atau dijatuhkan, dapat diselesaikan dengan menggunakan persamaan fungsi kuadrat. Seperti menentukan puncak tertinggi dari benda yang kita lempar. Demikian juga masalah menentukan kecepatan awal peluru pada olah raga tolak peluru.

Gambar 1.2 Orang Berjalan

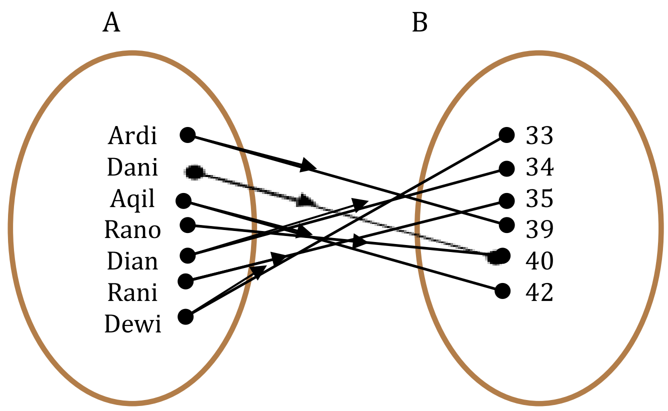
Gambar 1.3 Tolak Peluru.

Konsep Relasi dan fungsi.

Konsep “fungsi” merupakan hal yang penting dalam berbagai cabang matematika. Pengertian fungsi dalam matematika berbeda dengan pengertian dalam kehidupan sehari-hari. Dalam pengertian sehari-hari, “fungsi” adalah guna atau manfaat. Kata fungsi dalam matematika sebagaimana diperkenalkan oleh Leibniz (1646-1716) digunakan untuk menyatakan suatu hubungan atau kaitan yang khas antara dua himpunan, sehingga fungsi dapat dikatakan merupakan hal yang istimewa dari suatu relasi antara dua himpunan.

Untuk memahami konsep fungsi, coba Kalian perhatikan ilustrasi berikut.
Sejak tahun 2006, melalui Undang-undang nomor 23 tahun 2006 tentang Administrasi Kependudukan, pemerintah mewajibkan semua warga Negara Indonesia memiliki Nomor Induk Kependudukan (NIK) yang tidak sama dengan orang lain. Hubungan NIK dengan individu seseorang merupakan fungsi pemetaan yang informasi kependudukan orang yang bersangkutan. Program NIK berkaitan dengan e-KTP. Dengan e-KTP diharapkan seseorang tidak lagi berpeluang memiliki lebih dari satu KTP karena telah menggunakan sistem basis data terpadu yang menghimpun data penduduk dari seluruh Indonesia.

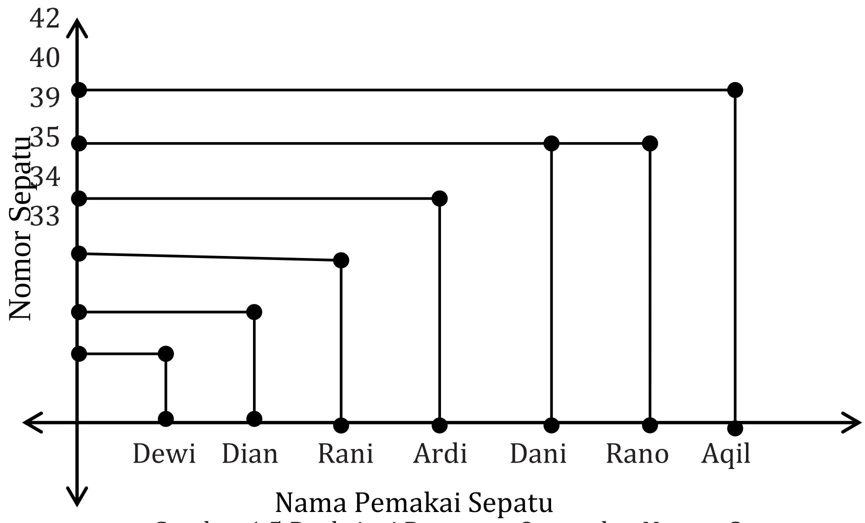
Seperti juga NIK, setiap orang dari Kalian pasti punya nomor sepatu, nomor celana atau nomor baju masing-masing. Misalnya ukuran sepatu Ardi adalah 39, Dani adalah 40, Aqil adalah 42, Rano adalah 40 Dian adalah 34, Rani adalah 35 dan Dewi 33. Setiap orang memiliki ukuran unik (tunggal) dan beberapa orang bisa memiliki ukuran sepatu yang sama, misalnya Dani dan Rano. Tetapi, tidak ada orang yang memiliki ukuran sepatu lebih dari satu. Kita menyatakan hubungan atau relasi ini sebagai fungsi dan dapat digambarkan pada diagram panah berikut.



Gambar 1.4 Relasi nomor sepatu

Hubungan tersebut dapat juga dituliskan dalam bentuk pasangan berurut: (Ardi, 39), (Dani, 40), (Aqil, 42), (Rano, 40), (Dian, 34), (Rani, 35), (Dewi, 33). Hubungan antara Ardi dengan angka 39 adalah nomor sepatu yang digunakan. Begitu juga hubungan Dani, Aqil, dan nama-nama lain yang ada pada himpunan A dengan angka-angka yang ada pada himpunan B dari gambar diagram panah di atas hubungan nomor sepatu yang digunakan. Jadi dua himpunan di atas dihubungkan oleh aturan nomor sepatu dan ditKaliani dengan garis panah yang menghubungkan anggota kedua himpunan.

Aturan yang menghubungkan kelompok nama dengan kelompok nomor sepatu pada Gambar 1.4 disebut relasi antara kelompok nama pada himpunan A dengan nomor sepatu pada himpunan B, relasinya adalah 'nomor sepatu yang digunakan'. Relasi yang disajikan pada Gambar 1.4 di atas ditKaliani dengan sebuah garis panah dari kelompok nama menuju kelompok nomor sepatu, relasi seperti ini biasa disebut relasi yang dinyatakan dengan diagram panah. Selain dengan diagram panah. Relasi dapat juga dinyatakan dengan himpunan pasangan terurut dan dengan menggunakan diagram kartesius seperti berikut.



Gambar 1.5 Deskripsi Pasangan Orang dan Nomor Sepatu

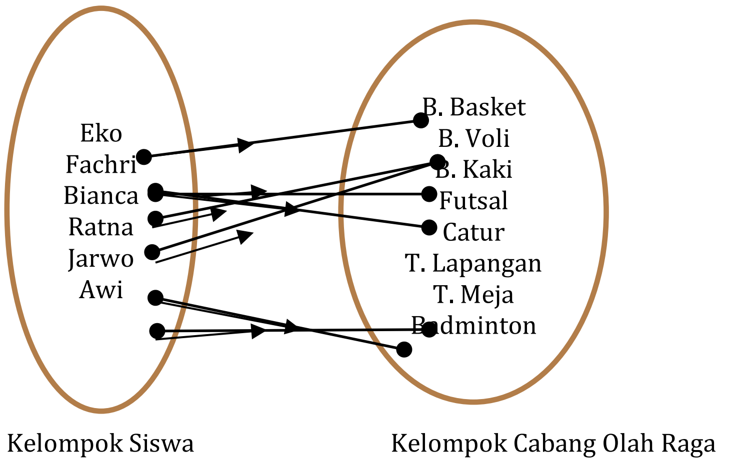
Untuk lebih memahami masalah relasi, coba Kalian perhatikan contoh berikut:

Contoh 1.1

Dalam rangka Pekan Olah Raga Pelajar tingkat provinsi, SMA XYZ mengirimkan beberapa orang siswanya untuk mengikut seleksi tingkat kabupaten. Dari 9 cabang yang akan dilombakan, yaitu Bola Basket, Bola Voli, Bola Kaki, Futsal, Badminton, Tenis Lapangan, Tenis Meja dan Catur, SMA XYZ meloloskan 6 siswanya untuk mewakili tim kabupaten dalam 6 cabang yang dilombakan, yaitu Eko untuk cabang Bola Basket, Fachri untuk bola kaki dan futsal, Bianca dan Ratna untuk bola voli, Jarwo untuk Badminton, dan Awi untuk tenis meja. Pak Alam sebagai guru olah raga yang membimbing siswa ikut seleksi akan membuat laporan kepada kepala sekolah dalam bentuk diagram panah, himpunan pasangan berurut dan diagram kartesius. Bagaimana bentuk laporan yang akan dibuat pak Alam?

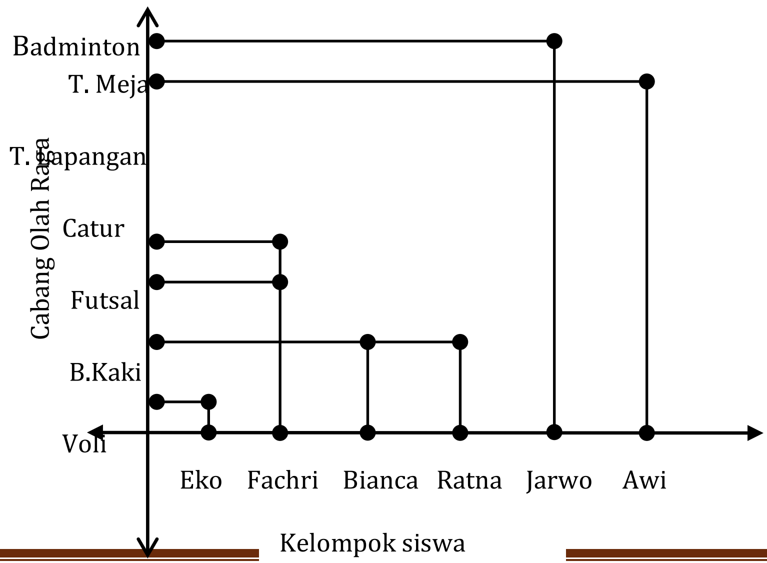
Alternatif Penyelesaian:

- Pasangan Berurut
  Himpunan pasangan berurut: {(Eko, Basket), (Fachri, B. Kaki), (Fachri, Futsal), (Bianca, B. Voli), (Ratna, B. Voli), (Jarwo, Badminton), (Awi, T. Meja)
- Diagram panah.



Gambar 1.6

- Diagram Kartesius



Dari paparan dan contoh di atas, kita dapat menemukan definisi dari relasi.

Definisi 1.1

Misalkan A dan B adalah himpunan. Relasi dari A ke B adalah aturan pengaitan/ pemasangan anggota-anggota A dengan anggota-anggota B

Perhatikan Contoh 1.1, terlihat bahwa Kalian panah mengarah dari anggota himpunan siswa yang terpilih seleksi ke anggota Cabang Olah Raga. Himpunan yang anggotanya akan dipasangkan pada Contoh 1.1., yaitu himpunan siswa disebut daerah asal (*domain*). Himpunan Cabang Olah raga yang akan diikuti disebut daerah kawan (*kodomain*). Himpunan yang anggotanya adalah anggota daerah kawan yang memiliki pasangan di daerah asal disebut daerah hasil (*range*). Himpunan daerah asal (*Domain*) pada contoh 1.1 adalah {Eko, Fachri, Bianca, Ratna, Jarwo, Awi}. Himpunan daerah kawan (*Kodomain*) adalah {B. basket, B. Voli, B. Kaki, Futsal, Catur, Tenis Lapangan, tenis Meja, Badminton}. Daerah hasilnya (*Range*) adalah {B. basket, B. Voli, B. Kaki, Futsal, tenis Meja, Badminton}.

Contoh 1.2

Sebuah pusat perbelanjaan menerapkan tarip parkir mobil pengunjung dalam tabel berikut:

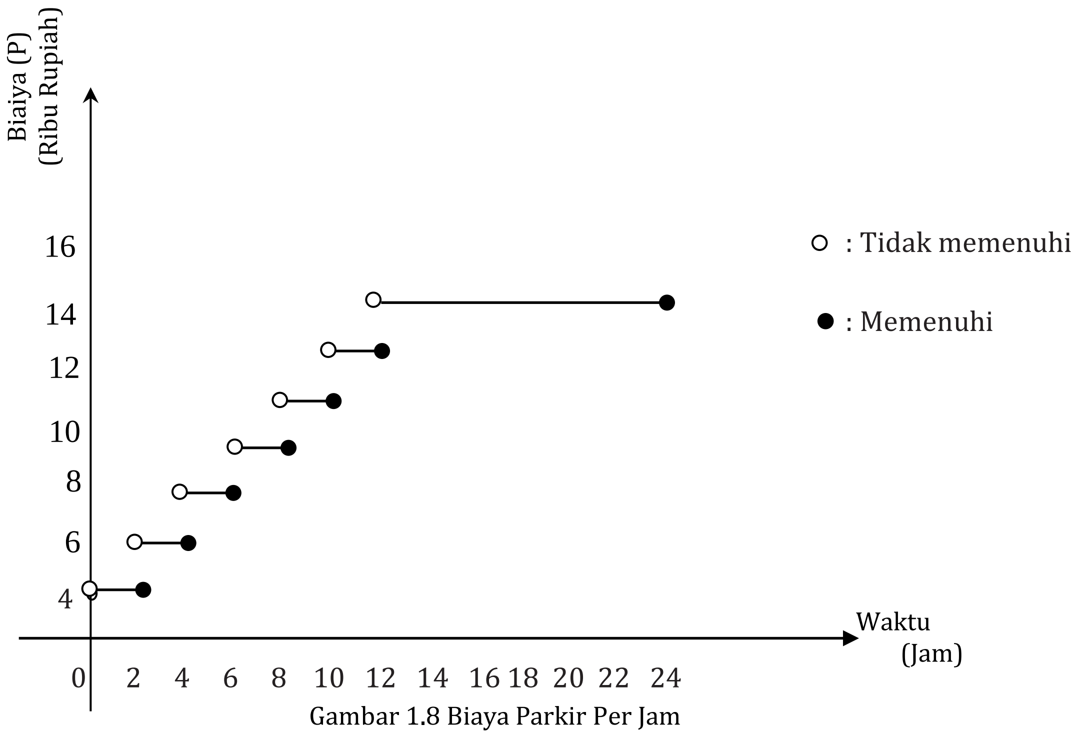
No.	Lama Waktu (t) (Dalam satuan jam)	Biaya Parkir (P) (Dalam satuan ribu rupiah)
1	$0 < t \leq 2$	4
2	$2 < t \leq 4$	6
3	$4 < t \leq 6$	8
4	$6 < t \leq 8$	10
5	$8 < t \leq 10$	12
6	$10 < t \leq 12$	14
7	$12 < t \leq 24$	16

Tabel 1.1 Tarip Parkir

Gambarkanlah biaya parkir di atas dalam bentuk grafik kartesius. Jika seseorang memarkirkan mobilnya dari pukul 07.30 WIB sampai dengan pukul 10.00 WIB, berapa biaya parkir yang harus dibayar?

Alternatif Penyelesaian:

Tarif parkir berdasarkan Tabel 1.1 di atas, jika digambarkan dalam grafik kartesius ditunjukkan sebagai berikut.



Gambar 1.8 Biaya Parkir Per Jam

Jika lama waktu parkir dari pukul 07.30 WIB sampai pukul 10.00 WIB, maka seseorang itu parkir selama 2 jam 30 menit dan membayar parkir sebesar Rp 6.000,-. Hubungan antara lama waktu parkir dengan biaya parkir pada Contoh 1.2 di atas merupakan sebuah contoh relasi.

Dari relasi antara waktu parkir dengan biaya pada Contoh 1.2 di atas, dinyatakan hal-hal berikut.

Daerah asal adalah $\{t : 0 < t \leq 24\}$

Daerah kawan adalah: {4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 }

Daerah hasil adalah: {4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 }

Berdasarkan contoh-contoh di atas, ditemukan definisi daerah asal, daerah kawan, dan daerah hasil sebagai berikut.

Definisi 1.2

Daerah asal atau biasa disebut domain suatu relasi adalah himpunan tidak kosong dimana sebuah relasi didefinisikan.

Definisi 1.3

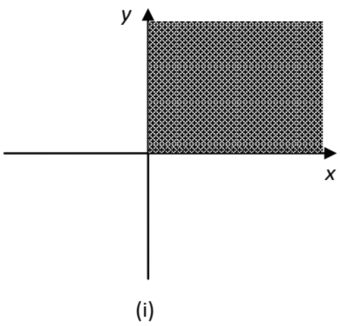
Daerah kawan atau biasa disebut kodomain suatu relasi adalah himpunan tidak kosong dimana anggota domain memiliki pasangan sesuai relasi yang

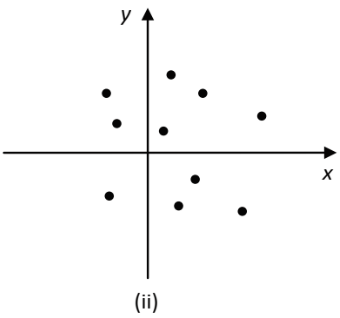
Definisi 1.4

Daerah hasil atau biasa disebut *range* suatu relasi adalah sebuah himpunan bagian dari daerah kawan (*kodomain*) yang anggotanya adalah pasangan anggota domain yang memenuhi relasi yang didefinisikan.

Sebuah relasi sering dinyatakan dalam bentuk persamaan dalam variabel x dan y, sebagai contoh: $y = 2x$ dan $y = x^2$. Nilai x merupakan domain relasi dan nilai y merupakan daerah hasil relasi. Pada persamaan $y = 2x$, jika domain x dibatasi oleh $0 < x \leq 5$, untuk x bilangan riil, maka daerah hasilnya adalah $0 < y \leq 10$.

Akan tetapi, tidak semua relasi dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan. Perhatikan gambar berikut.





Gambar 1.9 Jenis-jenis Relasi

Berdasarkan Gambar 1.9, dapat diketahui bahwa:

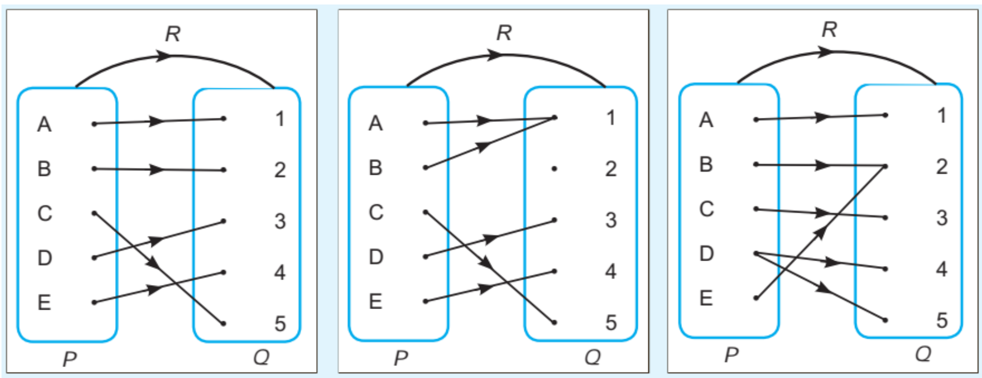
(i) Seluruh titik pada $x > 0$ dan $y > 0$ merupakan contoh relasi.

(ii) Kesepuluh titik-titik pada Gambar 1.9 (ii) merupakan contoh relasi

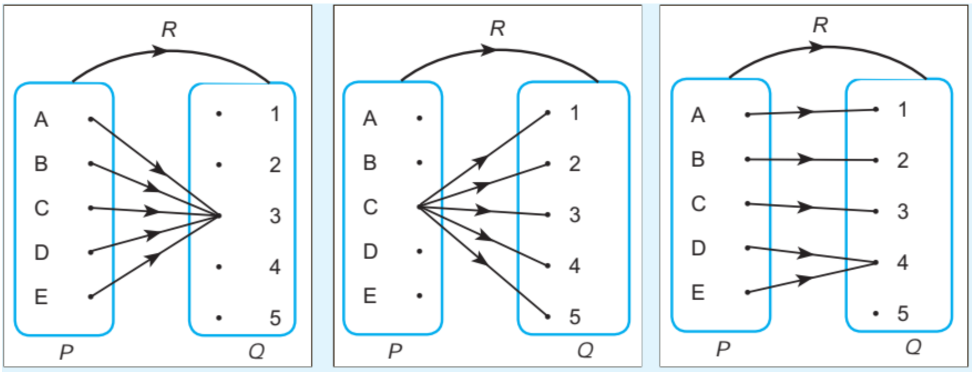
Fungsi

Setelah Kalian memahami masalah relasi, sekarang Kita kembangkan pembahasan dengan mempelajari fungsi. Kalian akan mempelajari menentukan notasi fungsi, daerah asal, daerah hasil, ekspresi simbolik fungsi, serta skesta grafik fungsi linear, fungsi kuadrat dan fungsi rasional.

Kalian perhatikan gambar diagram panah berikut.



(a) (b) (c)



(d) (e) (f)

Pada gambar 1.10 (a)

- Semua anggota himpunan *P* memiliki pasangan anggota himpunan *Q*
- Semua anggota himpunan *P* memiliki pasangan tunggal dengan anggota himpunan *Q*
- Semua anggota himpunan *Q* memiliki pasangan dengan anggota himpunan *P*.

Pada gambar 1.10 (b)

- Semua anggota himpunan *P* memiliki pasangan dengan anggota himpunan *Q.*
- Ada anggota himpunan *P* yang berpasangan dengan dua buah anggota himpunan *Q*.
- Ada anggota himpunan *Q* yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan *P.*

Pada gambar 1.10 (c)

- Semua anggota himpunan *P* memiliki pasangan dengan anggota himpunan *Q.*
- Ada anggota himpunan *P* yang berpasangan dengan dua anggota himpunan *Q*.
- Semua anggota himpunan *Q* memiliki pasangan dengan anggota himpunan *P*

Pada gambar 1.10 (d)

- Semua anggota himpunan *P* memiliki pasangan dengan anggota himpunan *Q.*
- Semua anggota himpunan *P* memiliki pasangan yang tunggal dengan anggota himpunan *Q*.
- Ada anggota himpunan *Q* yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan *P*.

Pada gambar 1.10 (e)

- Ada anggota himpunan *P* yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan *Q*.
- Ada anggota himpunan *P* yang berpasangan dengan semua anggota himpunan *Q*.
- Semua anggota himpunan *Q* memiliki pasangan dengan anggota himpunan *P*.

Pada gambar 1.10 (f)

- Ada anggota himpunan *P* yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan *Q*.

- Ada anggota himpunan Q yang tidak memiliki pasangan dengan anggota himpunan P.

Relasi yang ditunjukkan diagram panah pada gambar 1.10 (a), (b) dan (c) merupakan contoh fungsi. Syarat sebuah relasi menjadi fungsi adalah sebagai berikut.

- Semua anggota himpunan P memiliki pasangan dengan anggota himpunan Q.
- Semua anggota himpunan P memiliki pasangan tunggal dengan anggota himpunan Q.

Berdasarkan contoh-contoh di atas kita temukan definisi fungsi sebagai berikut.

Definisi 1.5

Misalkan A dan B himpunan.

Fungsi f dari A ke B adalah suatu aturan pengaitan yang memasangkan setiap anggota himpunan A dengan tepat satu anggota himpunan B.

Notasi Fungsi

Jika f suatu fungsi yang memetakan/memasangkan setiap x anggota himpunan A ($X \in A$) dengan tepat satu y anggota himpunan B, maka dapat ditulis:
f: $x \rightarrow y$ (dibaca: f memetakan x ke y) y disebut bayangan x oleh fungsi f dan dinyatakan dengan $f(x)$.

Jadi, $f(x)$ adalah nilai y untuk sebuah nilai x yang diberikan, sehingga dapat ditulis $y= f(x)$ yang berarti bahwa y adalah fungsi dari x. Dalam hal tersebut, nilai dari y bergantung pada nilai x, maka dapat dikatakan bahwa y adalah fungsi dari x

Contoh 1.3:

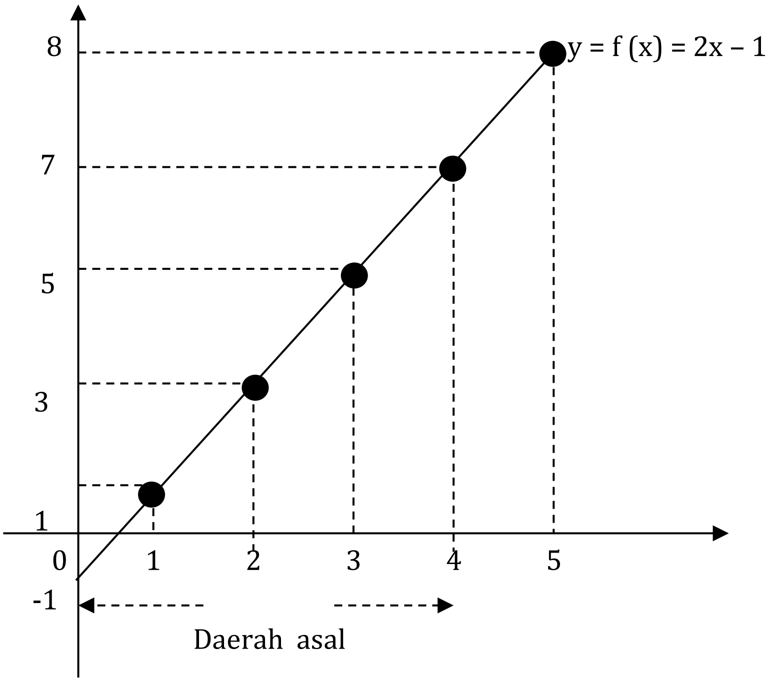
Diketahi f : A → B dan dinyatakan oleh rumus f (x) = 2x – 1.
Jika daerah asal A ditetapkan A : $\{x \mid 0 \leq x \leq 4. x \in R\}$

a. Tentukan f (0), f (1), f (2), f (3) dan f (4).
b. Gambarkan grafik fungsi y : f (x) = 2x – 1 dalam bidang kartesius.
c. Tentukan daerah hasil dari fungsi f.

Alternatif Penyelesaian:

a. f (x) = 2x – 1, maka :
   f (0) = 2.0 – 1 = -1
   f (1) = 2.1 – 1 = 1
   f (2) = 2.2 – 1 = 3
   f (3) = 2.3 – 1 = 5
   f (4) = 2.1 – 1 = 7

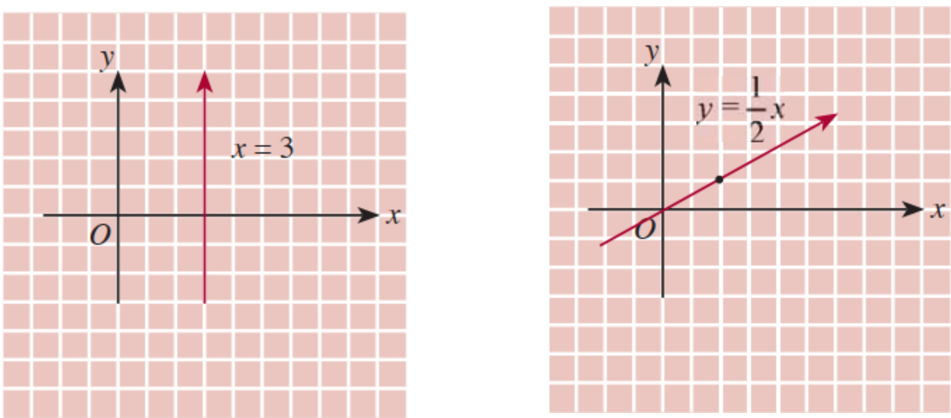
b. Grafik fungsi y : f (x) = 2x – 1



c. Daerah hasil fungsi $f \rightarrow R_f = \{y \mid -1 \le y \le 7, y \in R\}$

Contoh 1.4

Perhatikan gambar berikut, manakah yang menyatakan suatu fungsi dari $R \rightarrow R$, $x, y \in R$?



(a) (b)

Gambar 1.11

Alternatif Penyelesaian:

Pada gambar 1.11 (a) tampak bahwa untuk $x = 3$ dihubungkan dengan $y \in R$, misalnya 3 dengan 0, 3 dengan 1, 3 dengan 2, dan seterusnya. x tidak tepat dipasangkan dengan satu anggota y, akibatnya, relasi $\{(x,y) \mid x = 3;\ x, y \in R\}$ *bukan* merupakan fungsi.

Pada gambar 1.11 (b) tampak bahwa setiap unsur pada *domain* dihubungkan dengan satu dan hanya satu unsur pada *range*. Misalnya, 4 dihubungkan dengan 2; −2 dihubungkan dengan −1; 0 dihubungkan dengan 0; 2 dengan 1; dan seterusnya. Dengan demikian, relasi $\{(x,y) \mid y = \frac{1}{2}x;\ x, y \in R\}$ merupakan fungsi.

Grafik pada Gambar 1.11(b), menyatakan fungsi.
Jika daerah asal dari suatu fungsi f tidak atau belum ditentukan, maka dapat diambil daerah asalnya himpunan dari semua bilangan riil yang mungkin, sehingga daerah hasilnya merupakan bilangan riil. Daerah asal yang ditentukan dengan cara seperti itu disebut daerah asal alami (natural domain).

Contoh 1.5:
Tentukan daerah asal alami dari fungsi berikut:

a. $f(x) = \dfrac{4}{x+1}$

b. $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$

Alternatif Penyelesaian:

a. $f(x) = \dfrac{4}{x+1}$, supaya f (x) bernilai riil maka $x + 1 \neq 0$ atau $x \neq -1$

Jadi Df : $\{x \mid x \in R, \text{ dan } x \neq -1\}$

b. $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$, supaya g (x) bernilai riil maka :

$4 - x^2 \geq 0$

$x^2 - 4 \leq 0$

$(x - 2)(x + 2) \leq 0 \rightarrow -2 \leq x \leq 2$

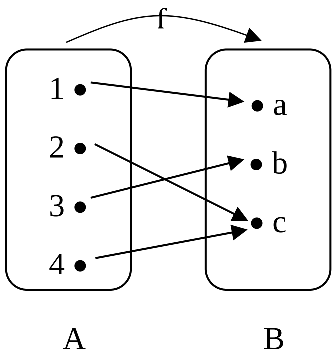
Jadi Dg = $\{x \mid -2 \leq x \leq 2, x \in R\}$

Sifat-sifat Fungsi :

a. Fungsi Surjektif

Suatu fungsi $f : A \rightarrow B$ disebut fungsi surjektif atau fungsi onto atau fungsi kepada jika dan hanya jika daerah hasil fungsi f sama dengan himpunan B atau $R_f = B$.

Contoh dalam diagram panah



A : {1, 2, 3, 4} , B : {a, b, c}

Fungsi $f : A \rightarrow B$ dinyatakan dalam pasangan terurut : f = {(1, a), (2, c), (3, b), (4, c)}.

Tampak bahwa daerah hasil fungsi f adalah R_f : {a, b, c} dan $R_f = B$ maka fungsi f adalah fungsi surjektif atau fungsi onto atau fungsi kepada.

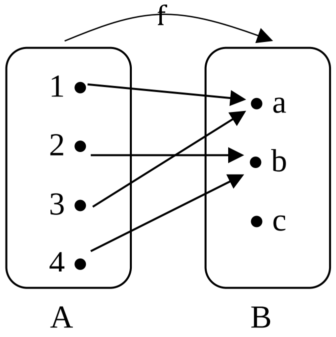
Fungsi $f : A \rightarrow B$ disebut fungsi into atau fungsi ke dalam jika dan hanya jika daerah hasil fungsi f merupakan himpunan bagian murni dari himpunan B atau $R_f \subset B$.

Contoh :

A : {1, 2, 3, 4} , B : {a, b, c}

fungsi f : A → B dinyatakan dalam pasangan terurut f : {(1, a), (2, b), (3, a), (4, b)}.

Tampak bahwa daerah hasil fungsi f : R_f : {a, b} dan $R_f \subset B$, maka fungsi f adalah fungsi into atau fungsi ke dalam.



b. Fungsi Injektif

Fungsi f : a → B disebut fungsi injektif (fungsi satu-satu) jika dan hanya jika untuk tiap $a_1, a_2 \in A$ dan $a_1 \neq a_2$ berlaku f $(a_1) \neq$ f (a_2).

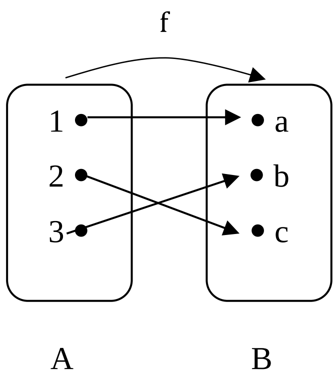
Contoh :

A : {1,2,3} , B : {a,b,c}

f : A → B dinyatakan dalam pasangan terurut f : {(1, a), (2, b), (3, c)}.

Tampak bahwa tiap anggota A yang berbeda mempunyai peta yang berbeda di B

Fungsi f adalah fungsi injektif atau satu-satu.



c. Fungsi Bijektif

Fungsi f : A → B disebut fungsi bijektif jika dan hanya jika fungsi f sekaligus merupakan fungsi surjektif dan fungsi injektif.

Contoh :

A : {1, 2, 3} , B : {a, b, c}

Fungsi f : A → B, dinyatakan dalam pasangan terurut f : {(1, a), (2, c), (3, b)}.

Tampak bahwa fungsi f adalah fungsi surjektif sekaligus fungsi injektif.

fungsi f adalah fungsi bijektif atau korespondensi satu-satu.

Operasi Aljabar pada Fungsi

Jenis operasi aljabar sering dijumpai dalam himpunan bilangan riil, seperti penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian dan perpangkatan. Operasi aljabar pada bilangan riil dapat diterapkan pada aljabar fungsi, yaitu jika diketahui fungsi f(x) dan g (x), dan n bilangan rasional.

Untuk memahami operasi aljabar pada fungsi, coba Kalian amati masalah berikut.
Seorang pengrajin miniatur menerima pesanan pembuatan miniatur dan asesoris tempat penyimpanannya. Harga untuk membuat miniatur saja (F_1) biayanya Rp.75.000,- per buah mengikuti fungsi $F_1(x) = 75.000x + 5000$.
Jika akan membuat lengkap dengan asesoris tempat penyimpanannya, biaya tambahannya (F_2) Rp.25.000,- perbuah mengikuti fungsi $F_2\ (x) = 25.000x + 1000$, dengan x banyaknya miniatur yang dibuat.

a. Berapa biaya untuk membuat 10 buah miniature lengkap dengan asesoris penyimpanannya?
b. Tentukan selisih biaya pembuatan miniature dengan asesoris penyimpanannya jika banyaknya miniature yang dibuat 5 buah.

Alternatif Penyelesaian:
Fungsi biaya pembuatan miniature: $F_1(x) = 75.000x + 5.000$
Fungsi biaya pembuatan asesoris $F_2(x) = 25.000x + 1000$.

a. Biaya untuk membuat miniature lengkap dengan asesorisnya adalah:

   $F_1(x) + F_2(x) = (75.000x + 5.000) + (25.000X + 1000)$
   $= 100.000x + 6.000$

   Total biaya untuk membuat 10 buah miniature lengkap dengan asesorisnya adalah:
   $F_1\,(10) + F_2\,(10) = 100.000.10 + 6.000 = 1.006.000.$

   Jadi total biaya untuk membuat 10 miniatur lengkap dengan asesorisnya adalah Rp. 1.006.000,-

   Selisih biaya pembuatan miniature dengan asesorisnya adalah:
   $F_1(x) - F_2(x) = (75.000x + 5.000) - (25.000X + 1000)$
   $= 50.000x + 4.000$

   Selisih biaya pembuatan 5 buah miniature dengan asesorisnya adalah :
   $F_1\,(5) - F_2\,(5) = 50.000.5 + 4 = 246.000$

   Jadi selisih biaya pembuatan 5 buah miniatur dengan asesorisnya adalah :
   Rp. 246.000,-

Operasi aljabar pada fungsi didefinisikan sebagai berikut

Definisi 1.6

Jika f suatu fungsi dengan daerah asal D_f dan g suatu fungsi dengan daerah asal D_g, maka pada operasi aljabar penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian dinyatakan sebagai berikut.
Jumlah f dan g ditulis $f + g$ didefinisikan sebagai $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ dengan daerah asal $D_{f+g} = D_f \cap D_g$.
Selisih f dan g ditulis $f - g$ didefinisikan sebagai $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ dengan daerah asal $D_{f-g} = D_f \cap D_g$.
Perkalian f dan g ditulis $f \times g$ didefinisikan sebagai $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$ dengan daerah asal $D_{f \times g} = D_f \cap D_g$.
Pembagian f dan g ditulis $\frac{f}{g}$ didefinisikan sebagai $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ dengan daerah asal $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g$.

Contoh 1.7

Diketahui fungsi-fungsi f dan g ditentukan dengan rumus f (x) = 2x – 10 dan g (x) = $\sqrt{2x-1}$

Tentukan nilai fungsi-fungsi berikut, kemudian tentukan daerah asalnya.

a. (f + g) (x)
b. (f – g) (x)
c. (f x g) (x)
d. $\left(\frac{f}{g}\right)$ (x)

Alternatif Penyelesaian:

Daerah asal fungsi f(x) = 2x - 10 adalah D_f : {x | x ∈ R}

Daerah asal fungsi g(x) = $\sqrt{2x-1}$ adalah D_g : $\{x \mid x \geq \frac{1}{2}, x \in R\}$

a. Jumlah fungsi f (x) dan g (x) adalah

   (f + g) (x) = f (x) + g (x) = 2x – 10 + $\sqrt{2x-1}$

   Daerah asal fungsi (f + g) (x) adalah

   $D_{f+g} = D_f \cap D_g$

   $= \{x \mid x \in R\} \cap \{x \mid x \geq \frac{1}{2}, x \in R\}$

   $= \{x \mid x \geq \frac{1}{2}, x \in R\}$

b. Selisih fungsi f (x) dan g (x) adalah

   (f – g) (x) = f (x) – g (x) = 2x – 10 - $\sqrt{2x-1}$

Daerah asal fungsi (f - g) (x) adalah

$D_{f-g} = D_f \cap D_g$

$= \{x \mid x \in R\} \cap \{x \mid x \geq \frac{1}{2}, x \in R\}$

$= \{x \mid x \geq \frac{1}{2}, x \in R\}$

c. Perkalian fungsi f (x) dan g (x) adalah

$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = (2x - 10)(\sqrt{2x-1}) = 2x\sqrt{2x-1} - 10\sqrt{2x-1}$

Daerah asal fungsi (f x g) (x) adalah

$D_{f \times g} = D_f \cap D_g$

$= \{x \mid x \in R\} \cap \{x \mid x \geq \frac{1}{2}, x \in R\}$

$= \{x \mid x \geq \frac{1}{2}, x \in R\}$

d. Pembagian fungsi f (x) dengan g (x) adalah

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x-10}{\sqrt{2x-1}}$

Daerah asal fungsi $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ adalah

$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g$ dan $g(x) \neq 0$

$= \{x \mid x \in R\} \cap \{x \mid x \geq \frac{1}{2}, x \in R \text{ dan } \sqrt{2x-1} > 0\}$

$= \{x \mid x \geq \frac{1}{2}, x \in R \text{ dan } x > \frac{1}{2}\}$

$= \{x \mid x > \frac{1}{2}, x \in R\}$

B. Rangkuman

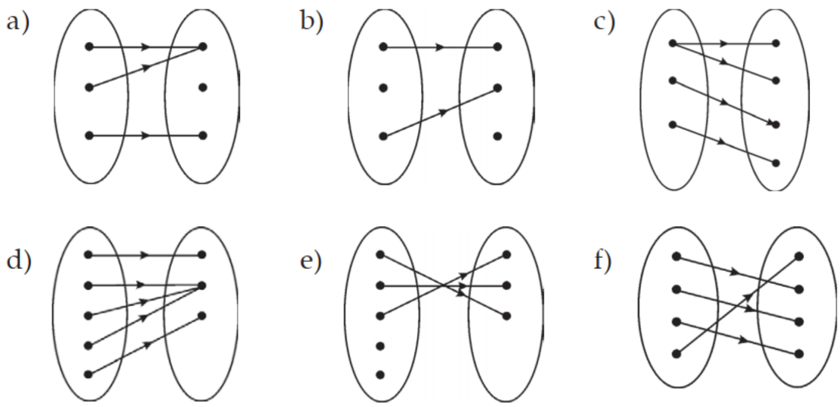
1. **Apabila A dan B himpunan**, maka hubungan atau pemasangan anggota A dengan anggota B disebut relasi. Apabila antara anggota A dan anggota B tidak ada hubungan, maka himpunan A dan B tidak berelasi.
2. **Fungsi** adalah relasi yang memetakan, memasangkan atau mengawankan setiap anggota di himpunan A dengan tepat satu anggota di himpunan B.
3. **Sebuah fungsi f dari himpunan A ke** B, dapat dinyatakan dalam bentuk diagram, pasangan terurut atau dengan notasi fungsi $f : A \rightarrow B$ atau dengan rumus $y = f(x)$, dimana $x \in A$ dan $y \in B$. Himpunan A disebut pula dengan daerah asal (domain) dan B disebut daerah kawan (kodomain). Sedangkan daerah hasil fungsi (range) merupakan himpunan bagian dari B
4. Misalkan fungsi f memetakan himpunan A ke himpunan B dengan darah hasil R. Fungsi disebut fungsi **surjektif** (onto) apabila daerah hasil sama dengan daerah kawan (R = B), disebut fungsi **injektif** (into) apabila untuk setiap $a \neq b$, maka $f(a) \neq f(b)$ dan disebut fungsi bijektif (satu ke satu) apabila fungsi tersebut injektif dan sekaligus surjektif
5. Operasi Aljabar pada fungsi didefinisikan:
   a. Jumlah f dan g ditulis $f + g$ didefinisikan sebagai $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ dengan daerah asal $D_{f+g} = D_f \cap D_g$.
   b. Selisih f dan g ditulis $f - g$ didefinisikan sebagai $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ dengan daerah asal $D_{f-g} = D_f \cap D_g$.

c. Perkalian f dan g ditulis $f \times g$ didefinisikan sebagai $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$ dengan daerah asal $D_{f \times g} = D_f \cap D_g$.

d. Pembagian f dan g ditulis $\frac{f}{g}$ didefinisikan sebagai $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ dengan daerah asal $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g$.

C. Latihan Soal

1. Manakah dari diagram berikut yang mendefinisikan fungsi?



2. Diketahui fungsi $f : x \to f(x)$ didefinisikan oleh $f(x) = x^3$ pada interval $-1 \leq x \leq 2$
   a. Tentukan f (-1), f (0), f (1), dan f (2)!
   b. Tentukan domain dan range!
3. Diketahui fungsi $f : R \to R$ dan $f(x) = x^2 + 2x - 3$.
   a. Hitunglah $f(-4), f(-3), f(-2), f(-1), f(0)$, dan $f(2)$
   b. Gambarkan grafik fungsi tersebut.
   c. Jika daerah asal fungsi tersebut adalah $Df = \{x | -4 \leq x \leq 2, x \in R\}$, tentukan daerah hasilnya.
4. Tentukan mana yang merupakan fungsi surjektif, injektif, atau bijektif dari fungsi $f : R \to A$ yang ditentukan sebagai berikut.
   a. $f : x \to 3x - 1, x \in R$
   b. $f : x \to x^2 - 2, x \in R$
5. Diketahui fungsi $f(x) = \sqrt{x + 1}$ dan $g(x) = \sqrt{16 - x^2}$

   Tentukan nilai fungsi-fungsi berikut, kemudian tentukan daerah asalnya.
   a. $(f + g)(x)$
   b. $(f - g)(x)$
   c. $(f \times g)(x)$
   d. $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2
FUNGSI LINIER, FUNGSI KUADRAT DAN FUNGSI RASIONAL

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 2 ini diharapkan:
1. Memahami bentuk umum fungsi linear dan menggambar grafiknya
2. Memahami bentuk umum fungsi kuadrat dan menggambar grafiknya
3. Memahami bentuk umum fungsi rasional dan menggambar grafiknya

B. Uraian Materi

Pada pembelajaran kedua ini pembahasan akan kita fokuskan pada fungsi linear, fungsi kuadrat dan fungsi rasional.

1. Fungsi Linear

Fungsi linear merupakan salah satu fungsi yang sederhana dalam matematika. Banyak aplikasi dari fungsi linear ini, seperti hubungan antara ketinggian pesawat dan suhu udara, hubungan penawaran dengan ketersediaan barang, serta hubungan antara jarak dan waktu tempuh. Dalam modul ini, fungsi linear dinyatakan sebagai berikut.

$$\boxed{f(x) = mx + a}$$

Dikatakan linear karena grafiknya berupa garis. Grafik dari fungsi ini dapat Kalian gambar dengan menentukan dua nilai c yang berbeda serta menentukan pasangan titik salah satunya dengan jalan membuat tabelnya.

Contoh 2.1
Tentukan rumus untuk fungsi linear f jika diberikan pasangan nilai seperti tabel berikut.

Tabel 1.1.

x	f(x)
-1	-1
2	8

Alternatif Penyelesaian:
Karena f fungsi linear, dia dapat dinyatakan sebagai f(x) = mx + a. Oleh karena itu, Kalian akan memperoleh dua persamaan.

(-1) = m.(-1) + a ……(1)

8 = m.2 + a…………..(2)

Jika persamaan (2) dikurangi dengan persamaan (1), akan akan peroleh persamaan

9 = m. 3

yang memberikan penyelesaian m = 3.

Substitusi nilai ini ke persamaan (2) maka di peroleh persamaan

$$8 = 3.2 + a,$$

yang memberikan penyelesaian a = 2.
Jadi, rumus untuk f(x) sebagai berikut f(x) = 3x + 2.
Variabel pada fungsi linear dan juga pada fungsi-fungsi lain tidak harus berupa simbol x, tetapi dapat berupa simbol yang lain, seperti t, z, dan w. Khusus untuk variabel t, variabel ini biasanya digunakan sebagai simbol dari waktu.

Contoh 1.2
Hubungan antara waktu dan jarak yang ditempuh suatu kendaraan merupakan fungsi linear g. Lalu, diberikan pasangan nilai seperti tabel berikut.

Tabel 1.2.

t (dalam menit)	g(t) (dalam km)
5	200
10	400

Tentukan rumus hubungan waktu dan jarak tempuh kendaraan tersebut.

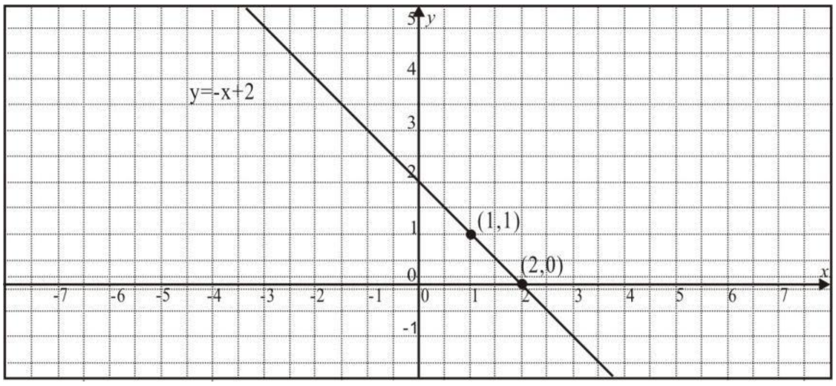
Alternatif Penyelesaian
Seperti pada Contoh 1.1, karena g fungsi linear, dia dapat dinyatakan sebagai $g(t)$ = mt + a.
Oleh karena itu, di peroleh dua persamaan, yaitu:
200 = m.5 + a
400 = m.10 + a

Periksa bahwa penyelesaian bersama dari persamaan di atas adalah g(t) = 40t. Jadi, hubungan waktu dan jarak tempuh kendaraan adalah g(t) = 40t.
Pada fungsi linear bentuk, jika f(x) dinyatakan sebagai y, yaitu: y = mx + a.
Persamaan terakhir ini disebut sebagai persamaan garis.

Contoh 2.3
Tentukan persamaan garis melalui titik (1,1) dan (2,0). Tentukan grafiknya.

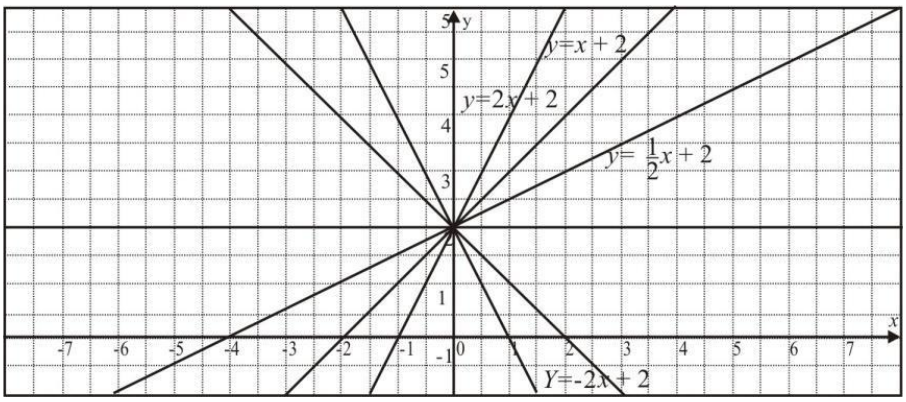
Alternatif Penyelesaian:
Persamaan garis sebagai y = mx + a. Kalian akan peroleh dua persamaan berikut.
1 = m.1 + a
0 = m.2 + a.

Penyelesaian bersama dua persamaan tersebut adalah m = -1 dan a = 2. Jadi, persamaan garis yang diminta adalah y = -m + 2. Grafik persamaan garis diperoleh dengan menghubungkan titik-titik yang dilaluinya seperti gambar berikut ini.



Gambar 2.1

Perhatikan grafik berikut.



Gambar 2.2

Pada gambar di atas, dapat dilihat berbagai kemiringan garis terhadap sumbu x. Kemiringan garis disebut sebagai **gradien**. Gradien merupakan kooefisien dari variabel m. Kalian tentunya bertanya bagaimana cara menentukan gradien garis?

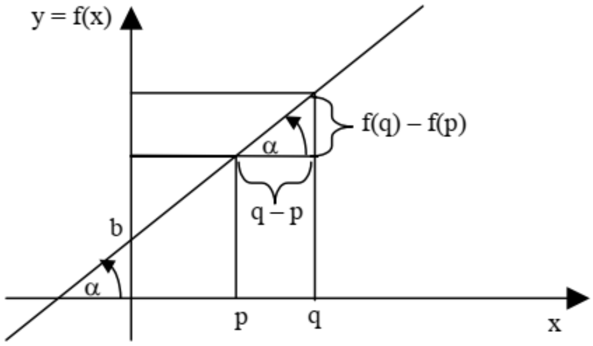
Jika kita perhatikan bahwa gradien adalah garis yang dilihat relatif sumbu x, terutama untuk garis dengan persamaan y = 2 atau ditulis sebagai y = 0.x + 2, Maka dapat diduga bahwa gradien garis dapat ditentukan dengan perbandingan panjang segmen garis pada sumbu y dengan panjang segmen garis pada sumbu x dari dua titik tertentu. Sehingga jika kita mempunyai dua titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) gradien garis dapat di rumuskan sebagai berikut.

$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

Lihat kembali pada contoh 3, m = -1, diperoleh dari rumus gradien garis tersebut adalah:

$$m = \frac{0-1}{2-1} = -1$$

Untuk lebih jelas coba Kalian perhatikan grafik berikut:



Gambar 2.3

$$f(x) = mx + b \rightarrow f(p) = m.p + b$$
$$f(q) = m.q + b$$
$$\underline{\hspace{4cm}} -$$
$$f(p) - f(q) = m(p - q)$$

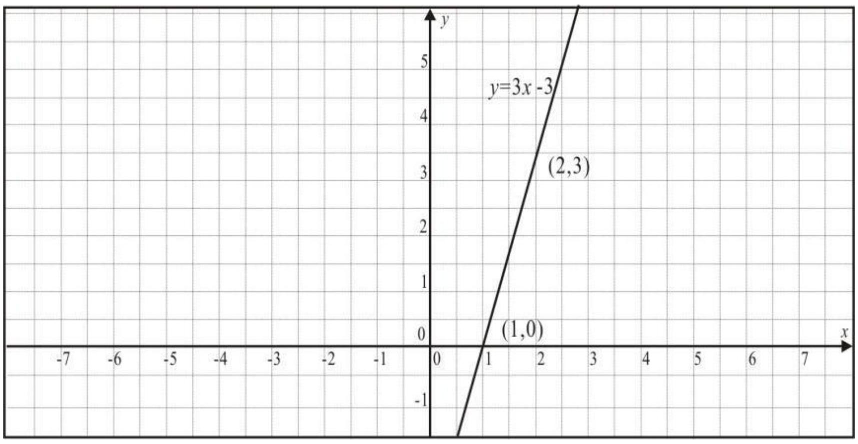
$$\boxed{\frac{f(p)-f(q)}{p-q} = m = \tan\alpha}$$

Dari jabaran di atas tampak bahwa gradien tersebut merupakan nilai perbandingan antara selisih komponen y dan x dari dua sebarang dua titik pada garis tersebut.

Jika persamaan garis y = ax + b maka gradiennya adalah a dan melalui titik (0,b). Secara umum sebuah garis lurus (yang tidak sejajar atau berimpit dengan sumbu Y) persamaannya adalah y = mx + n, dengan m adalah gradien (koefisien arah) garis yang menunjukkan kemiringan garis.
Garisnya condong ke kanan jika dan hanya jika $m > 0$ dan condong ke kiri jika dan hanya jika $m < 0$.

Contoh 2.4
Gambarlah suatu garis yang mempunyai gradien m = 3 dan titik potong dengan sumbu Y adalah -3.

Alternatif Penyelesaian:
Persamaan garis yang dimaksud adalah y = 3x - 3.
Untuk menggambarnya, Anda tentukan dua titik yang dilaluinya seperti berikut.
$x = 1 \rightarrow y = 0$, $x = 2 \rightarrow y = 3$.
Jadi, dua titik yang dilaluinya adalah (1,0) dan (2,3). Oleh karena itu, Kalian peroleh gambar seperti berikut ini.



Gambar 2.4

Gradien/kemiringan garis dari garis tersebut dengan rumus adalah:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-0}{2-1} = 3$$

Sama dengan gradien yang diketahui, yaitu m = 3.

Contoh 2.5

Gambarlah suatu garis yang melalui titik (2,3) dan mempunyai gradien $\frac{1}{2}$.

Alternatif penyelesaian:

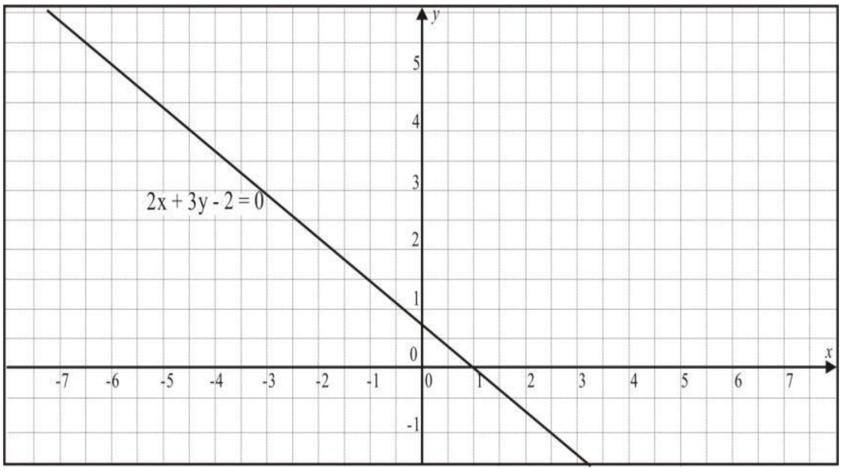
Misalnya, persamaan garis yang dimaksud adalah y = mx + a.

Karena garis mempunyai gradien $\frac{1}{2}$, maka persamaan garis menjadi y = $\frac{1}{2}$ x + a.

Berikutnya garis melalui (2,3). Maka itu, Anda peroleh persamaan 3 = $\frac{1}{2}$ 2 + a ↔ a = a.

Jadi persamaan garis yang melalui titik (2, 3) dan gradient $\frac{1}{2}$ adalah y = $\frac{1}{2}$ x + 2

Gambar garis seperti berikut ini.



Gambar 2.5

Contoh 2.6

Diberikan persamaan linear 2x + 3y – 2 = 0. Tentukan gradien, titik potong dengan sumbu y dan gambar grafiknya.

Alternatif Penyelesaian:

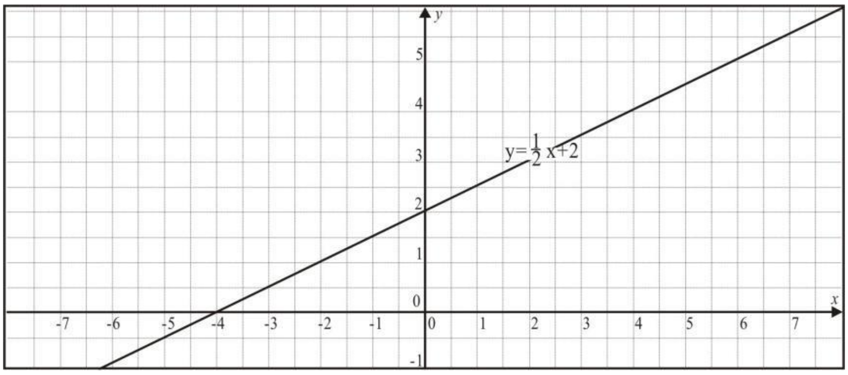
Ubah 2x + 3y – 2 = 0 ke bentuk y = mx + a.

$2x + 3y - 2 = 0 \leftrightarrow 3y = -2x + 2$

$\leftrightarrow y = \frac{-2}{3}x + \frac{2}{3}$

Jadi gradiennya $m = \frac{-2}{3}$

Titik potong dengan sumbu Y: $(0, \frac{2}{3})$



Gambar 2.6

Dari contoh di atas, jika persamaan berbentuk AX + BY + C = 0, maka gradiennya adalah $m = -\frac{A}{B}$ dan titik potong dengan sumbu Y adalah $(0, \frac{-C}{A})$

Jika diketahui suatu persamaan garis, dapat ditentukan gradien garis dan titik potong garis tersebut dengan sumbu *y.*

Menentukan persamaan garis dengan gradien tertentu dan melalui satu titik tertentu.

Misal garis yang akan kita tentukan persamaannya bergradien m dan melalui titik sembarang (x_1, y_1).

Misalkan persamaan garisnya adalah $y = mx + n$.

Garis ini melalui titik (x_1, y_1) berarti $y_1 = mx_1 + n$ atau $n = y_1 - mx_1$.

Dengan mensubstitusikan $n = y_1 - mx_1$ ke $y = mx + n$, maka diperoleh $y = mx + y_1 - mx_1$.

Persamaan $y = mx + y_1 - mx_1$ dapat diubah menjadi $y - y_1 = m(x - x_1)$.

Jadi persamaan **garis** yang **bergradien *m*** dan **melalui titik (x_1, y_1)** adalah:

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1).}$$

Contoh 2.7.
Tentukan persamaan garis yang bergradien -1 dan melalui titik (-2, 3).

Alternatif Penyelesaian:
Persamaan garis yang bergradien m dan melalui titik (x_1, y_1) adalah $\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1)}$.
Jadi persamaan garis bergradien -1 dan melalui titik (-2, 3) adalah $\boldsymbol{y} - 3 = -1\{x - (-2)\}$ atau $\boldsymbol{y} - 3 = -1\{x + 2\}$ atau $\boldsymbol{y} - 3 = -1x - 2$ atau $\boldsymbol{y} = -x + 1$.

Menentukan persamaan garis yang melalui dua titik.
Misalkan diberikan dua titk A(x_1, y_1) dan B(x_2, y_2).
Garis yang melalui titk A(x_1, y_1) adalah $\boldsymbol{y - y_1 = m}\ (x - x_1)$.
Garis ini melalui titik B(x_2, y_2), berarti $\boldsymbol{y_2 - y_1 = m}\ (x_2 - x_1)$ atau $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
Subtitusikan $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ke $\boldsymbol{y - y_1 = m}\ (x - x_1)$ sehingga diperoleh

$$\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\ (x - x_1)$$

Atau

$$\frac{\boldsymbol{y - y_1}}{\boldsymbol{y_2 - y_1}} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Jadi

$$\boxed{\frac{\boldsymbol{y - y_1}}{\boldsymbol{y_2 - y_1}} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}}$$

merupakan persamaan garis yang melalui titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2).

Contoh 2.8
Tentukan persamaan garis yang melalui titik (0, -3) dan (2, 5).

Alternatif Penyelesaian:
Persamaan garis yang titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) adalah $\frac{\boldsymbol{y - y_1}}{\boldsymbol{y_2 - y_1}} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$

Jadi persamaan garis yang melalui titik (0, -3) dan (2, 5) adalah $\frac{\boldsymbol{y - (-3)}}{\boldsymbol{5 - (-3)}} = \frac{x - 0}{2 - 0}$

$\frac{\boldsymbol{y+3}}{\boldsymbol{8}} = \frac{x}{2} \leftrightarrow (y + 3).2 = 8.x$
$\leftrightarrow 2y + 6 = 8x$
$\leftrightarrow 2y - 8x + 6 = 0$
Jadi persamaan garis yang melalui titik (0, -3) dan (2, 5) adalah $2y - 8x + 6 = 0$ atau
$2y = 8x - 6 \leftrightarrow y = 4x - 6$

2. Fungsi Kuadrat

.

Sekarang kita bersama-sama akan mempelajari bentuk lain dari suatu fungsi yang dikenal sebagai **fungsi kuadrat**.

Fungsi f: $R \to R$ yang didefinisikan sebagai f: $x \to ax^2 + bx + c$ dengan a, b, dan c anggota bilangan riil dan $a \neq 0$ disebut fungsi berderajat dua atau fungsi kuadrat.
Persamaan umum fungsi kuadrat f: $x \to ax^2 + bx + c$ adalah:

$$\boxed{y = ax^2 + bx + c}$$

dan grafik fungsinya disebut **kurva parabola**.

Ingat kembali cara menentukan penyelesaian dari suatu persamaan kuadrat yang berbentuk $ax^2 + bx + c = 0$ dengan a $\neq 0$ seperti dengan menggunakan rumus:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Penyelesaian dari suatu persamaan kuadrat disebut akar dari persamaan kuadrat.

Jika suatu fungsi kuadrat yang diketahui akar-akarnya misalkan x_1 dan x_2, maka fungsi kuadrat tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$\boxed{f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)}$$

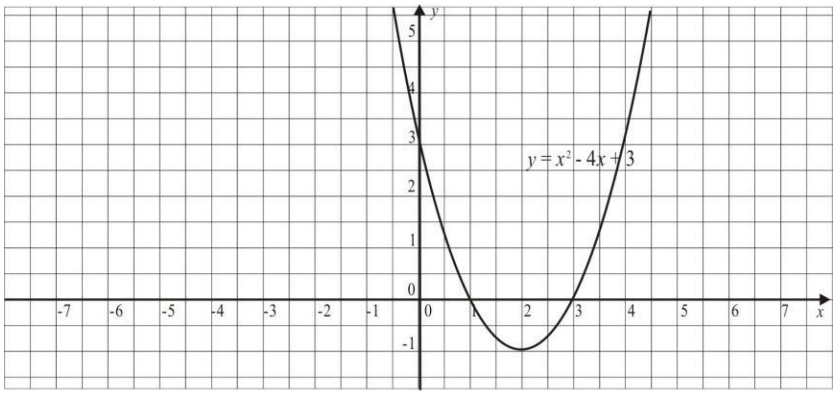
Untuk menggambar suatu fungsi kuadrat, ikuti prosedur tiga langkah sederhana berikut.
1. Tentukan titik potong kurva dengan sumbu x dan sumbu y
2. Tentukan titik puncak
3. Letakan titik-titik tersebut pada bidang koordinat Cartesius
4. Dapat menggunakan beberapa titik uji.
5. Hubungkan titik-titik tersebut dengan kurva.

Contoh 2.9
Dengan cara membuat tabel, gambarlah grafik fungsi kuadrat $y = x^2 - 4x + 3$

Alternatif Penyelesaian:
Dengan menggunakan prosedur tiga langkah di atas, Kalian memperoleh tabel berikut ini.
1. Titik potong kurva dengan sumbu x, diperoleh untuk nilai y = 0, maka
   $y = 0$ maka $0 = x^2 - 4x + 3 = (x-3)(x-1)$ atau x = 3 dan x = 1.
   Maka titik potong sumbu x adalah (1, 0) dan (3, 0).
2. Titik potong kurva dengan sumbu y, diperoleh untuk nilai x = 0, maka $y = 0^2 - 4.0 + 3$.
   Maka titik potong sumbu y adalah (0, 3).
3. Sumbu simetri fungsi kuadrat adalah $x_{sb} = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-b)}{2(1)} = \frac{4}{2} = 2.$ Nilai optimum untuk $x_{sb} = 2$ maka $y = (2)^2 - 4.2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$

Tabel 3

Berdasarkan dari data di atas, maka diperoleh grafik kurva sebagai berikut:



Gambar 2.7

Perhatikan secara seksama gambar Contoh 2.7.
Apa yang dapat kita simpulkan?
Beberapa hal yang dapat disimpulkan tentang grafik fungsi kuadrat $y = x^2 - 4x + 3$ sebagai berikut.

a. Memotong sumbu y di titik (0,3).
b. Memotong sumbu x di titik (1,0) dan (3,0).
c. Simetri terhadap garis $x = 2$.
d. Mempunyai titik puncak (2, -1).
e. Mempunyai nilai ekstrem -1.

Dari kesimpulan di atas, maka bisa diperoleh hal sebagai berikut:

a. Menggambar grafik fungsi kuadrat dengan cara menentukan titik potong dengan sumbu y, titik potong dengan sumbu x, dan titik puncak.
   Penentuan titik potong grafik fungsi kuadrat dengan sumbu y dilakukan melalui substitusi nilai $x = 0$ ke fungsi kuadrat. Lalu, Anda akan memperoleh berikut ini.
   $y = x^2 - 4x + 3$
   $y = 0^2 - 4.0 + 3$
   $y = 3$
b. Titik potong grafik fungsi kuadrat $y = x^2 - 4x + 3$ dengan sumbu y adalah titik (0,3). Nilai 3 merupakan nilai c pada fungsi kuadrat bentuk umum $y = ax^2 + bx + c$. Jadi, titik potong grafik fungsi kuadrat dengan sumbu y adalah titik (0, c).
c. Penentuan titik potong grafik fungsi kuadrat dengan sumbu x dilakukan melalui substitusi nilai $y = 0$ ke fungsi kuadrat, maka akan memperoleh:
   $y = x^2 - 4x + 3$
   $0 = x^2 - 4x + 3$
   $(x - 1)(x - 3) = 0$
   $x = 1$ atau $x = 3$.
   Jadi, titik potong grafik fungsi kuadrat $y = x^2 - 4x + 3$ dengan sumbu x adalah titik-titik (1,0) dan (3,0).

c. Garis simetri grafik fungsi kuadrat y = x^2 - 4x + 3 adalah x = 2. Nilai ini dapat Anda peroleh dari

$$2 = -\frac{-4}{2.1} = \frac{-b}{2a}$$

Jadi garis x = $\frac{-b}{2a}$ merupakan garis simetri dari fungsi kuadrat y = x^2 - 4x + 3.

d. Titik puncak grafik fungsi kuadrat y = x^2 – 4x + 3 adalah titik (2, −1). Nilai −1 disebut sebagai nilai ekstrem. Nilai ini dapat Anda peroleh dengan menyubstitusikan nilai x = 2 ke persamaan berikut.

y = x^2 – 4x + 3
= 2^2 – 4.2 + 3 = –1

Nilai ekstrem ini dapat pula Anda peroleh dari hal berikut ini.

$-1 = \frac{(-4)^2-4.1.3}{4.1}$
$= \frac{(b)^2-4.a.c}{4.a}$
$= -\frac{D}{4a}$

D = b^2 – 4.a.c disebut sebagai diskriminan.

Jadi, titik puncak grafik fungsi y = ax^2 + bx + c adalah $(\frac{-b}{2a}, -\frac{D}{4a})$

Hasil dari pembahasan di atas dapat Kalian gunakan untuk menggambar grafik fungsi kuadrat secara umum. Oleh karena itu, untuk menggambar grafik fungsi kuadrat, Kalian cukup menentukan hal-hal berikut.

1. Titik potong dengan sumbu y, yaitu (0, c).
2. Titik potong dengan sumbu x dengan mengambil nilai y = 0.
3. Titik puncak $(\frac{-b}{2a}, -\frac{D}{4a})$

Contoh 2.10

Gambarlah grafik fungsi kuadrat y = $2x^2$ – 2x - 4

Alternatif Penyelesaian

3. Titik potong dengan sumbu y adalah (0,c) = (0,-4).
4. Titik potong dengan sumbu x dan mengambil nilai y = 0

$2x^2$ – 2x - 4 = 0

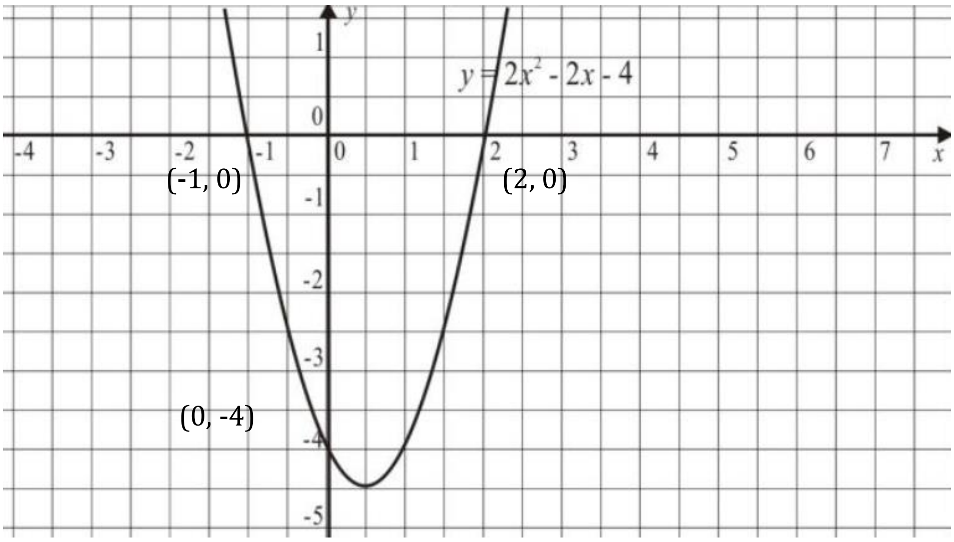
2(x^2 – x – 2) = 0 (kedua ruas dikali $\frac{1}{2}$)

x^2 – x – 2 = 0
(x + 1)(x – 2) = 0
X = -1 atau x = 2

Jadi, titik potong dengan sumbu x adalah (-1, 0) dan (2, 0).

3. Titik puncak $(\frac{-b}{2a}, -\frac{D}{4a}) = (\frac{-(-2)}{2.2}, \frac{(-2)^2-4.2.(-4)}{4.2}) = (\frac{1}{2}, -\frac{36}{8}) = (\frac{1}{2}, -\frac{9}{2})$

Gambar yang didapatkan:



$(\frac{1}{2}, -\frac{9}{2})$

Gambar 2.8

Perhatikan dalam contoh 2.9 dan 2.10 di atas fungsi kuadrat $y = ax^2 + bx + c$ untuk nilai $a > 0$, grafiknya buka ke atas atau menghadap ke atas.

Sekarang kita coba untuk fungsi kuadrat $y = ax^2 + bx + c$ dengan nilai $a < 0$. Kalian perhatikan contoh berikut.

Contoh 2.11

Gambarlah grafik fungsi kuadrat $y = -2x^2 + 2x + 4$

Alternatif Penyelesaian

1. Titik potong dengan sumbu y adalah (0,c) = (0,4).
2. Titik potong dengan sumbu x dan mengambil nilai y = 0

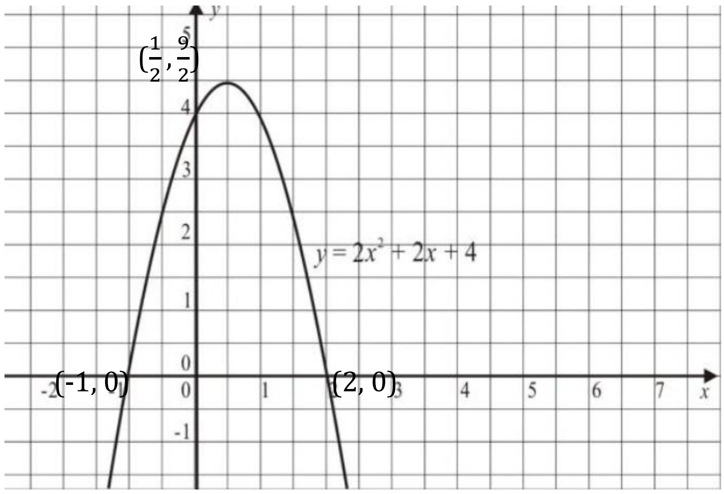
$-2x^2 + 2x + 4 = 0$

$-2(x^2 - x - 2) = 0$ (kedua ruas dikali- $\frac{1}{2}$)

$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$(x + 1)(x - 2) = 0$$
$$x = -1 \text{ atau } x = 2$$

Jadi, titik potong dengan sumbu x adalah (-1, 0) dan (2, 0).

3. Titik puncak $(\frac{-b}{2a}, -\frac{D}{4a}) = (\frac{2}{2.(-2)}, \frac{(2)^2-4.(-2).(4)}{4.)-2)}) = (-\frac{1}{2}, -\frac{36}{-8}) = (\frac{1}{2}, \frac{9}{2})$



Gambar 2.9

Jadi, grafik fungsi kuadrat y = -2x² + 2x + 4 menghadap ke bawah.

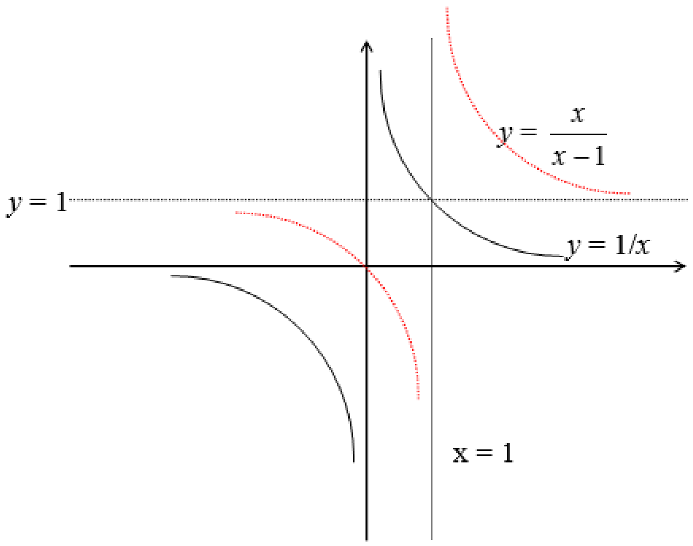
Secara umum, dapat Kalian simpulkan bahwa grafik fungsi kuadrat y = ax² + bx + c menghadap ke atas jika a > 0. Sebaliknya, menghadap ke bawah jika a < 0.

3. Fungsi Pecahan (Fungsi Rasional)

Fungsi pecah dapat didefinisikan sebagai berikut.
Fungsi pecah adalah fungsi yang dirumuskan oleh $f\,(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, dengan dengan P(x) dan Q (x) merupakan suku banyak dalam x dan Q(x) ≠ 0 pada domainnya.

Contoh fungsi pecah dan grafiknya.

$f(x) = \frac{1}{x}$ dan $f\,(x) = \frac{x}{x-1}$



Gambar 2.10

Nilai Nol Fungsi

Jika diketahui fungsi $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, maka nilai -nilai x yang menyebabkan f(x)= 0 disebut nilai nol dari fungsi f(x). Nilai nol disebut juga pembuat nol atau harga nol. Dapat dibuktikan bahwa jika f(x) = 0, maka juga P(x)= 0. Jadi, untuk mencari nilai nol fungsi $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, cukup dicari nilai (nilai-nilai) yang menyebabkan P(x)= 0.

Namun perlu diingat bahwa nilai x yang menyebabkan P(x) = 0 belum tentu merupakan nilai nol fungsi f(x). Ini terjadi jika nilai x tersebut ternyata juga membuat Q(x)= 0. Untuk x yang bersama-sama membuat P(x) dan Q(x) bernilai nol menyebabkan f(x) mempunyai nilai tak tentu. Misalnya, pada fungsi $(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x-4}$, nilai x = 1 bukan nilai nol dari fungsi f(x) sekalipun untuk P(x) = x^2- 3x + 2 berlaku P(1)= 0. Ini karena juga berlaku Q(1)= 0, sehingga f(1) bernilai tak tentu.

Perlu diperhatikan bahwa tidak setiap fungsi pecahan mempunyai nilai nol. Ini terjadi kalau P(x) tidak mungkin berharga nol.
Pada pembelajaran sebelumnya kita telah ketahui bahwa nilai nol suatu fungsi berkaitan dengan koordinat titik potong grafik dengan sumbu X. Jadi, jika x = a adalah nilai nol dari fungsi f(x), maka (a,0) adalah koordinat titik potong grafik dengan sumbu X.

Contoh 2.12

Tentukan nilai nol dari $f(x) = \frac{3x-6}{2x+1}$

Alternatif Penyelesaian:

2x – 6 = 0
2x = 6
x = 3

Jadi, nilai nol dari fungsi tersebut adalah x = 3.

Contoh 2.13

Tentukan nilai nol dari fungsi $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{2x+3}$

Alternatif Penyelesaian:

Nilai nol dicari dengan cara berikut.

$x^2 - 5x + 6 = 0$
$(x - 2)(x - 3) = 0$
x = 2 atau x = 3

Untuk x = 2 dan x = 3 nilai Q(x) tidak nol.
Jadi, nilai nol dari $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{2x+3}$ adalah x = 2 dan x = 3. Dan grafik f(x) memotong sumbu x di titik (2, 0) dan (3, 0).
Jika fungsi f(x) = $\frac{P(x)}{Q(x)}$, dan P(x) dalam bentuk $ax^2 + bx + c = 0$, ini berarti ada tidaknya nilai nol fungsi tergantung pada diskriminan persamaan kuadrat.

Contoh 2.14

Tentukan nilai nol dari f(x) = $\frac{x^2-x+3}{4x-3}$

Alternatif Penyelesaian:

Diskriminan dari $x^2 - x + 3 = 0$ adalah $D = (-1)^2 - 4.1.3 = 1 - 12 = -11<0$.

Karena D < 0, maka fungsi f(x) = $\frac{x^2-x+3}{4x-3}$ tidak mempunyai nol. Ini berarti grafik fungsi $f(x) = \frac{x^2-x+3}{4x-3}$ tidak memotong sumbu x.

Grafik Fungsi Pecahan

Langkah-langkah untuk menggambar grafik fungsi pecahan adalah sebagai berikut:

a. Menentukan titik-titik potong dengan sumbu x dan sumbu y
b. Menentukan asimptot datar, tegak dan miring
c. Membuat tabel yang menunjukkan dimana fungsi bernilai positif (grafik terletak di
d. atas sumbu x) dan bernilai negatif (grafik terletak di bawah sumbu x)
e. Menentukan nilai ekstrim fungsi (hanya untuk fungsi pecah terentu)
f. Menentukan titik-titik bantu (kalau perlu)
g. Mensketsa kurvanya

Jenis-jenis asimptot fungsi pecah:

a. Asimptot tegak, diperoleh bila penyebut bernilai nol
b. Asimptot datar, diperoleh bila $x \rightarrow \sim$
c. Asimptot miring, hanya untuk jenis fumgsi rasional yang pembilangnya mempunyai derajat lebih tinggi satu daripada penyebutnya

Contoh 2.15

Gambar sketsa grafik f(x) = $\frac{1}{x}$

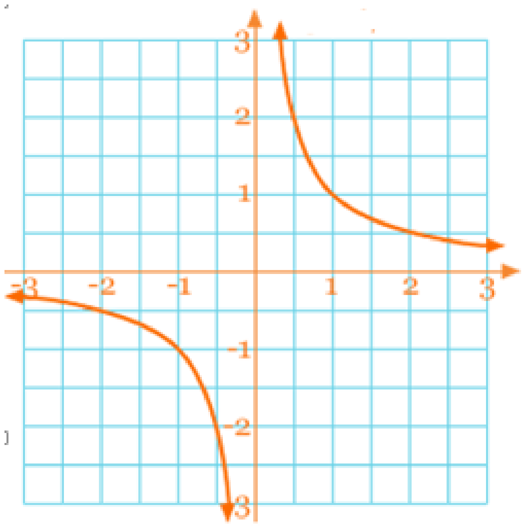
Alternatif Penyelesaian:

Langkah-langkah menggambar :

1. Titik potong sumbu x dan sumbu y tidak ada
2. Asimptot-asimptot : tegak : garis x = 0
   datar : untuk $x \rightarrow \sim$ diperoleh y = f(x) = 0
   Jadi garis y = 0 sebagai asimptot datar
3. Titik-titik bantu :

x	-1	-2	-3	-4	1	2	3	4
f(x)	-1	-$\frac{1}{2}$	-$\frac{1}{3}$	-$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

4. Sketsa grafik



Gambar 2.11

Contoh 2.16

Sketsalah grafik $f(x) = \frac{3x+2}{x+1}$

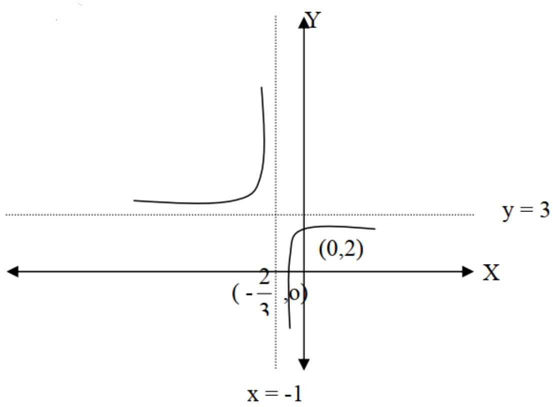
Langkah-langkah:

1. titik-titik potong dengan sumbu x, syarat f(x) = y = 0 ⇒ 3x + 2 = 0 ⇔ x =$-\frac{2}{3}$, titik potong dengan sumbu x$(-\frac{2}{3}, 0)$.
2. Titik potong dengan sumbu y, syarat x = 0 ⇒ f(x) = y = 2 titik potong (0,2)
3. Asimptot tegak : x + 1 = 0, garis x = -1 sebagai asimptot tegak
4. Asimtot datar: $f(x) = \frac{3x+2}{x+1} = \frac{x(3+\frac{2}{x})}{x(1+\frac{1}{x})}$, untuk x → ~ maka $\frac{1}{x}$ → 0 dan $\frac{2}{x}$ → 0

   Jadi asimptot datar: garis y = $\frac{3+0}{1+0}$=3
5. Titik Bantu

x	-2	-3	-4	1	2	3
y	4	$3\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{3}$	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{2}{3}$	$2\frac{3}{4}$

6. Sketsa grafik



Gambar 2.12

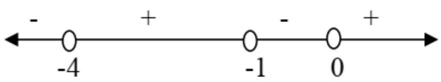
Contoh 2.17

Buat sketsa grafik f(x) = $\frac{3x}{x^2+5x+4}$

Alternatif Penyelesaian:

Langkah – langkah:

1. Titik potong dengan sumbu x dan sumbu y adalah (0,0)
   Asimptot – asimptot :
   a. tegak, diperoleh bila $x^2 + 5x + 4 = 0$,
   b. $(x + 4)(x + 1) = 0$
   c. x = -4 atau x = -1, asimptot tegak adalah garis x = -4 dan x = -1
   d. datar : f(x) = $\frac{3x}{x^2+5x+4} = \frac{x^2\left(\frac{3}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}\right)} = \frac{\frac{3}{x}}{1+\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}$
   e. Untuk $x \to \sim$ maka $\frac{1}{x} \to 0$ sehingga $\frac{3.0}{1+5.0+4.0} = \frac{0}{1} = 0$
2. Sumbu x dibagi menjadi 4 interval oleh titik potong sumbu x dan asimptot tegak. Tentukan tanda f (x) untuk masing-masing interval



3. Nilai ekstrim
   Misalkan f(x) mempunyai nilai ekstrim p. Dengan demikian p = $\frac{3x}{x^2+5x+4}$

   $\leftrightarrow \mathrm{px}^2 + 5\mathrm{px} + 4\mathrm{p} = 3\mathrm{x}$

   $\leftrightarrow \mathrm{px}^2 + 5\mathrm{px} + 4\mathrm{p} - 3\mathrm{x} = 0$

   Supaya persamaan kuadrat mempunyai akar-akar, D≥ 0

   $\mathrm{px}^2 + 5\mathrm{px} + 4\mathrm{p} - 3\mathrm{x} = 0 \leftrightarrow \mathrm{px}^2 + (5\mathrm{p} - 3)\mathrm{x} + 4\mathrm{p} = 0$

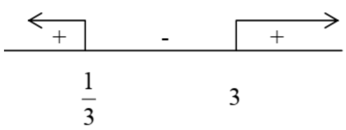
   D≥ 0

   $(5p - 3)^2 - 4.p.4p \geq 0 \leftrightarrow 25p^2 - 30p + 9 - 16p^2 \geq 0$

   $\leftrightarrow 9p^2 - 30p + 9 \geq 0$

   $\leftrightarrow 3p^2 - 10p + 3 \geq 0$

   $\leftrightarrow (3p - 1)(P - 3) \geq 0$

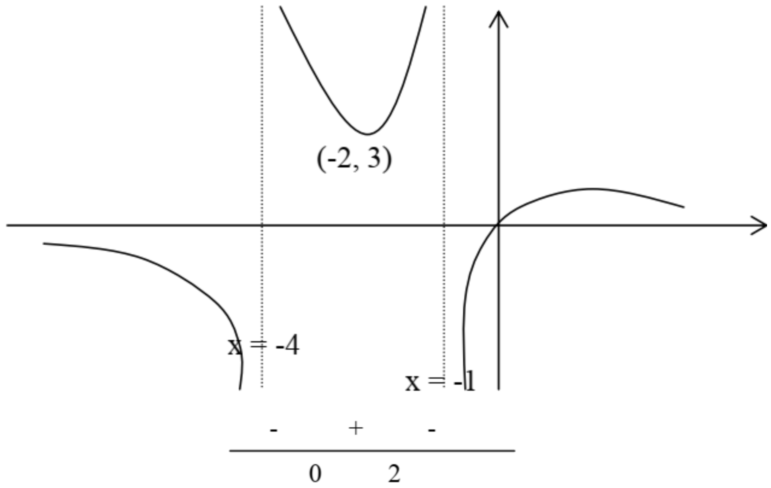


   p = y ≤ $\frac{1}{3}$ atau p ≥ 3

   Ini menujukkan nilai ekstrim minimum y = 3 dan nilai ekstrim maksimum y = $\frac{1}{3}$
   Untuk menentukan titik maksimum dan minimum, subtitusi nilai ekstrim maksimum dan minimum ke dalam f (x), diperoleh: titik ekstrim minimum (-2, 3) dan titik ekstrim maksimum (2 , $\frac{1}{3}$).
4. Titik-titik bantu

x	-6	-5	-3	$-2\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$	1	2	3
y	$-1\frac{4}{5}$	$-3\frac{3}{4}$	$4\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{3}$	$3\frac{3}{5}$	$3\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{9}{28}$

5. Sketsa Grafik



Contoh 2.18

Buat sketsa grafik $f(x) = \frac{6x^2}{3x^2+1}$

Alternatif Penyelesaian:

Langkah – langkah:

1. Titik potong dengan sumbu x dan sumbu y adalah (0,0)
2. Asimptot – asimptot :
   a. tegak, tidak ada
   b. datar: f(x) = $\frac{6x^2}{3x^2+1} = \frac{6}{3+\frac{1}{x^2}}$

      Untuk $x \to \sim$ maka $\frac{1}{x} \to 0$ sehingga y= $\frac{6}{3+0} = \frac{6}{2} = 3$ merupakan asimtot datar.
3. f(x) selalu positif untuk x < 0 maupun x > 0.
4. Nilai ekstrim

   Misalkan f(x) mempunyai nilai ekstrim p. Dengan demikian p = $\frac{6x^2}{3x^2+1}$

   $\leftrightarrow 3\text{px}^2 + \text{p} = 6\text{x}^2$

   $\leftrightarrow 3\text{px}^2 - 6x^2 + \text{p} = 0$

   $\leftrightarrow (3\text{p} - 6)\text{x}^2 + \text{p} = 0$

   Supaya persamaan kuadrat mempunyai akar-akar, D ≥ 0

   $(3\text{p} - 6)\text{x}^2 + \text{p} = 0$

   D ≥ 0

   $(0)^2 - 4.(3p\text{-}6).p \geq 0 \quad \leftrightarrow -12p^2 + 24p \geq 0$

   $\leftrightarrow p^2 + 2p \geq 0$

   $\leftrightarrow p^2 - 2p \leq 0$

   $\leftrightarrow p(p-2) \leq 0$

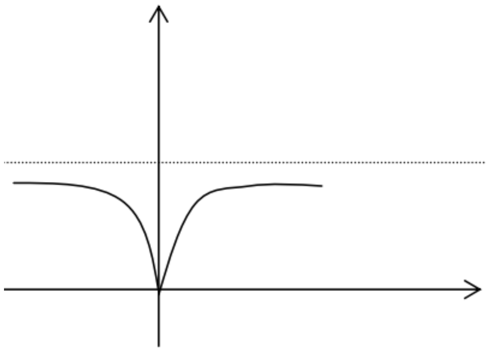
   Jadi 0 ≤ p ≤ 2 atau 0 ≤ y ≤ 2

   Ini menyatakan nilai y terletak dalam interval 0 sampai 2. Nilai y minimum adalah 0. titik minimum (0,0). Grafik tidak memiliki nilai maksimum.

5. Titik-titik bantu.

x	-3	-2	-1	1	2	3
y	$\frac{27}{14}$	$\frac{24}{13}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{24}{13}$	$\frac{27}{14}$

6. Sketsa grafik



Catatan :

a. asimptot datar grafik $y = \frac{ax+b}{px+q}$ adalah $y = \frac{a}{p}$

b. grafik $y = \frac{1}{x-a}$ dapat diperoleh dengan cara menggeser grafik $y = \frac{1}{x}$ sebanyak a satuan ke kanan.

c. grafik $y = a + \frac{1}{x}$ dapat diperoleh dengan cara menggeses grafik grafik $y = \frac{1}{x}$ sejauh a satuan ke atas.

d. Grafik y = $\frac{ax+b}{px^2+qx+r}$ selalu mempunyai asimptot datar sumbu x

C. Rangkuman

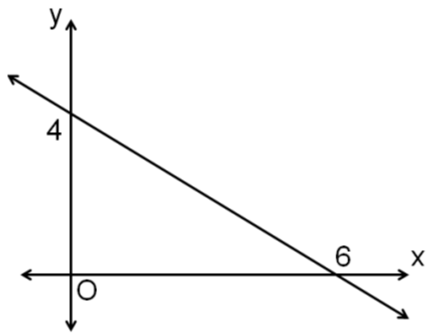
1) Fungsi linear dinyatakan sebagai f(x) = mx + a dikatakan linear karena grafiknya berupa garis.
2) Pada fungsi linear bentuk, jika f(x) dinyatakan sebagai y, Kalian memperoleh persamaan y = mx + a. Persamaan terakhir ini disebut sebagai persamaan garis
3) Garis mempunyai kemiringan atau disebut sebagai *gradien*. Jika Kalian mempunyai dua titik (x_1, y_1) dan (x_2 , y_2) gradien garis dapat Anda rumuskan sebagai berikut.
   $$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$
4) Tidak setiap persamaan garis merupakan fungsi linear. Sebagai contoh, grafik dari persamaan x = 2 adalah garis, tetapi dia bukan merupakan fungsi sehingga dia bukan merupakan fungsi linear.
5) Secara umum, persamaan linear dinyatakan sebagai Ax + By + C = 0 yang A dan B tidak keduanya nol.
6) Persamaan garis yang melalui titik (x_1, y_1) dan (x_2 , y_2) dapat dicari dengan rumus :
   $$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

7) Menggambar grafik fungsi kuadrat dapat dilakukan dengan tahap berikut.
   a. a. Dapatkan koordinat beberapa titik yang memenuhi persamaan, yaitu memilih beberapa nilai x dan menentukan nilai y yang berpadanan.
   b. Sajikan titik-titik yang Anda peroleh dalam bentuk tabel.
   c. Plotlah titik-titik tersebut pada bidang koordinat.
   d. Hubungkan titik-titik tersebut dengan kurva mulus.
8) Cara lain menggambar grafik fungsi kuadrat dengan langkah-langkah berikut:
   a. Titik potong dengan sumbu y, yaitu (0,c).
   b. Titik potong dengan sumbu x dengan mengambil nilai y = 0.
   c. Titik puncak $(\frac{-b}{2a}, -\frac{D}{4a})$
9) Grafik fungsi kuadrat y = ax^2 + bx + c menghadap ke atas jika a > 0. Sebaliknya, menghadap ke bawah jika a < 0.
10) Grafik fungsi kuadrat memotong sumbu x jika D ≥ 0.
11) Grafik fungsi kuadrat tidak memotong sumbu x jika D < 0.
12) Dalam hal D = 0, grafik fungsi kuadrat memotong sumbu x pada satu titik atau dikatakan menyinggung sumbu x.
13) Fungsi pecah adalah fungsi yang dirumuskan oleh $f\ (x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, dengan dengan P(x) dan Q (x) merupakan suku banyak dalam x dan Q(x) ≠ 0 pada domainnya.
14) Jika f(x) = 0, maka juga P(x)= 0. Jadi, untuk mencari nilai nol fungsi $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, cukup dicari nilai (nilai-nilai) yang menyebabkan P(x)= 0
15) Untuk menggambar grafik fungsi pecah, Kalian bisa mengikuti langkah-langkah berikut:
   a. Menentukan titik-titik potong dengan sumbu x dan sumbu y
   b. Menentukan asimptot datar, tegak dan miring
   c. Membuat tabel yang menunjukkan dimana fungsi bernilai positif (grafik terletak di
   d. atas sumbu x) dan bernilai negatif (grafik terletak di bawah sumbu x)
   e. Menentukan nilai ekstrim fungsi (hanya untuk fungsi pecah terentu)
   f. Menentukan titik-titik bantu (kalau perlu)
   g. Mensketsa kurvanya
16) Jenis-jenis asimptot fungsi pecahan :
   a. Asimptot tegak, diperoleh bila penyebut bernilai nol
   b. Asimptot datar, diperoleh bila $x \to \sim$
   c. Asimptot miring, hanya untuk jenis fumgsi rasional yang pembilangnya mempunyai derajat lebih tinggi satu daripada penyebutnya

D. Latihan Soal

1. Tentukan persamaan garis yang:
   a. melalui titik (1, 2) dan (-3, 4)
   b. melalui titik (2, 1) dan gradien m = $-\frac{1}{2}$
2. Gambarlah garis-garis dengan persamaan berikut pada grafik Cartesius
   a. y = 4x – 2
   b. 3x + 2y = 12

3. Perhatikan gambar garis berikut, tentukan persamaannya.



4. Sebuah perusahaan otomotif mengeluarkan produk mobil terbaru dan akan diuji kelayakan jalannya dengan cara dikendarai selama 10 jam. Pada 4 jam pertama mobil tersebut telah menempuh jarak 242 km dan setelah 6 jam mobil tersebut telah menempuh 362 km. Jika mobil selalu tetap maka tentukan persamaan garis yang menggambarkan kecepatan mobil.
5. Lukislah grafik fungsi kuadrat berikut:
   a. $f(x) = x^2 - 2x - 8$
   b. $f(x) = -x^2 + 6x - 5$
6. Tentukanalah persamaan fungsi kuadrat jika titik potongnya dengan sumbu-X adalah A(4, 0) dan B(−2, 0) serta melalui titik (2, −8)
7. Lukislah grafik fungsi pecahan berikut:
   a. $y = \frac{3}{x-2}$
   b. $y = \frac{x-1}{2x^2+x-4}$