KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
PERTIDAKSAMAAN RASIONAL SATU VARIABEL

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini diharapkan kalian dapat menjelaskan konsep pertidaksamaan rasional dan menentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan rasional, serta menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan pertidaksamaan rasional satu variabel.

B. Uraian Materi

Pertidaksamaan rasional adalah pertidaksamaan berbentuk pecahan dimana pembilang dan penyebutnya mengandung variabel atau penyebutnya saja yang mengandung variabel.

Perhatikan beberapa pertidaksamaan berikut, manakah yang merupakan pertidaksamaan rasional?

a. $\frac{x-2}{2x+6} < 0$

b. $\frac{2x-4}{5} - \frac{3x+9}{7} \geq 0$

c. $\frac{1}{x+1} > \frac{2}{x-1}$

d. $\frac{x^2-3x-10}{2} \leq \frac{1}{3}$

Pertidaksamaan (a) dan (c) merupakan pertidaksamaan rasional karena penyebutnya mengandung variabel *x*. Pertidaksamaan (b) dan (d) walaupun tampak berbentuk pecahan, tetapi bukan pertidaksamaan rasional karena penyebutnya tidak mengandung variabel. Pertidaksamaan (b) merupakan pertidaksamaan linear dan pertidaksamaan (d) merupakan pertidaksamaan kuadrat.

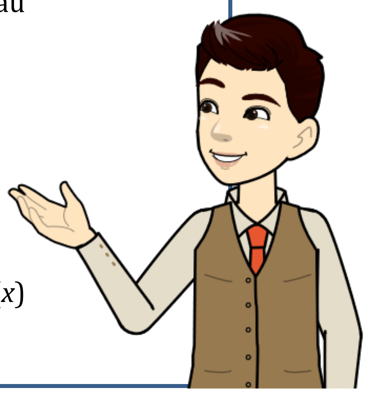
Bentuk Umum Pertidaksamaan Rasional

Bentuk umum dari pertidaksamaan rasional atau pertidaksamaan pecahan adalah:

$$\frac{f(x)}{g(x)} < 0 \text{ atau } \frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \text{ atau } \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$$

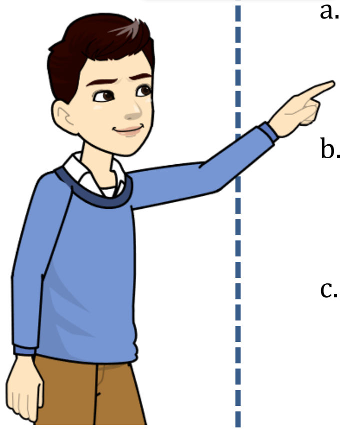
dengan $f(x)$ sebagai fungsi pembilang dan $g(x)$ sebagai fungsi penyebut dan $g(x) \neq 0$.



Langkah-langkah menyelesaikan pertidaksamaan rasional sebagai berikut:

1. Buat ruas kanan pertidaksamaan menjadi nol (bentuk umum).
2. Faktorkan fungsi pembilang dan penyebut ke dalam faktor-faktor linear apabila fungsi pembilang atau penyebut berupa polinomial derajat lebih dari 1.
3. Tentukan titik-titik kritis (pembuat nol) pada fungsi pembilang dan penyebut.
4. Gambar letak titik-titik kritis (pembuat nol) fungsi pembilang dan penyebut pada pada garis bilangan, sehingga diperoleh beberapa daerah (interval).
5. Tentukan daerah (interval) bertanda positif dan negatif dengan cara mengambil satu titik di setiap daerah sebagai **titik uji**. Substitusikan titik uji ke pertidaksamaan dan tentukan tandanya saja (apakah + atau –)
6. Tulis tanda-tanda titik uji tersebut pada daerah dimana titik uji berada pada garis bilangan.
7. Daerah yang memenuhi penyelesaian adalah daerah yang memiliki tanda sesuai dengan tanda pertidaksamaannya.

Catatan



a. Jika tanda pertidaksamaan rasional < 0 atau > 0 maka semua titik kritis tidak termasuk penyelesaian, sehingga digambar dengan tanda bulat kosong pada garis bilangan.
b. Jika tanda pertidaksamaan ≤ 0 atau ≥ 0 maka titik kritis yang diperoleh dari fungsi pembilang termasuk penyelesaian, sehingga digambar dengan tanda bulat hitam pada garis bilangan.
c. Ingat fungsi penyebut tidak boleh bernilai 0 ($g(x) \neq 0$), sehingga titik kritis dari penyebut tidak termasuk penyelesaian dan selalu digambar dengan bulatan kosong.

Contoh 1

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $\frac{x-1}{x+5} \leq 0$.

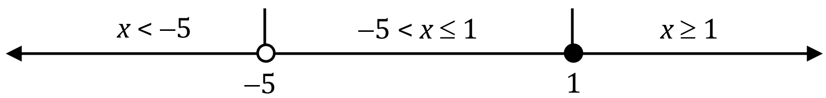
Jawab

Pada soal di atas, ruas kanan pertidaksamaan sudah sama dengan nol. Pembilang dan penyebut sudah dalam bentuk linear, sehingga kita dapat langsung menentukan titik kritis atau pembuat nolnya sebagai berikut.

Titik kritis (pembuat nol):

Pada pembilang: $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$
Pada penyebut: $x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5$ (ingat, $x = -5$ tidak termasuk penyelesaian).

Selanjutnya kita akan menggambar letak titik kritis (pembuat nol) pada garis bilangan. Ingat, titik kritis yang diperoleh dari penyebut digambar dengan tanda bulat kosong.

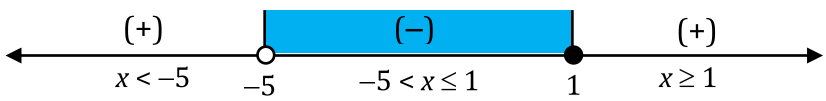


Pada garis bilangan di atas, kita peroleh tiga daerah (interval), yaitu daerah $x < -5$, daerah $-5 < x \leq 1$, dan daerah $x \geq 1$.

Pada masing-masing daerah kita ambil sembarang bilangan sebagai titik uji untuk menentukan tanda dari setiap daerah seperti pada tabel berikut.

Interval	Titik Uji yang diambil	Tanda dari Pembilang $(x-1)$	Tanda dari Penyebut $(x+5)$	Tanda dari $\frac{x-1}{x+5}$
$x < -5$	$x = -6$	$-6 - 1$ $(-)$	$-6 + 5$ $(-)$	$\frac{(-)}{(-)} = (+)$
$-5 < x \leq 1$	$x = 0$	$0 - 1$ $(-)$	$0 + 5$ $(+)$	$\frac{(-)}{(+)} = (-)$
$x \geq 1$	$x = 2$	$2 - 1$ $(+)$	$2 + 5$ $(+)$	$\frac{(+)}{(+)} = (+)$

Sehingga diperoleh tanda untuk setiap daerah seperti gambar berikut.



Langkah terakhir adalah menentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan dengan memperhatikan tanda pertidaksamaan pada soal.

Pertidaksamaan $\frac{x-1}{x+5} \leq 0$ memiliki tanda ≤ 0, berarti himpunan penyelesaiannya adalah yang bertanda negatif atau nol.

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \mid -5 < x \leq 1,\ x \in R\}$

Contoh 2

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $\frac{2x-6}{x^2-2x-8} > 0$.

Jawab

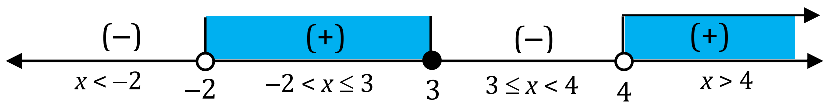
Pada soal di atas, ruas kanan pertidaksamaan sudah sama dengan nol. Pembilang dalam bentuk linear sedangkan penyebut dalam bentuk kuadrat, sehingga penyebut perlu difaktorkan ke bentuk linear.

$$\frac{2x-6}{x^2-2x-8} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x-6}{(x+2)(x-4)} > 0$$

Titik kritis (pembuat nol):

Pada pembilang: $2x - 6 = 0 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$
Pada penyebut: $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$
$x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$
(ingat, $x = -2$ dan $x = 4$ tidak termasuk penyelesaian).

Gambar letak titik kritis (pembuat nol) pada garis bilangan dan pengujian tanda setiap daerah (interval)



Pada garis bilangan di atas, kita peroleh empat daerah (interval), yaitu daerah $x < -2$, daerah $-2 < x \leq 3$, daerah $3 \leq x < 3$, dan daerah $x > 4$.

Pengujian tanda setiap daerah pada tabel berikut.

Interval	Titik Uji yang diambil	$(2x - 6)$	$(x + 2)(x - 4)$	$\frac{2x-6}{(x+2)(x-4)}$
$x < -2$	$x = -3$	$(-)$	$(-)(-) = (+)$	$(-)$
$-2 < x \leq 3$	$x = 0$	$(-)$	$(+)(-) = (-)$	$(+)$
$3 \leq x < 4$	$x = 3\frac{1}{2}$	$(+)$	$(+)(-) = (-)$	$(-)$
$x > 4$	$x = 5$	$(+)$	$(+)(+) = (+)$	$(+)$

Pertidaksamaan $\frac{2x-6}{x^2-2x-8} > 0$ memiliki tanda > 0, berarti himpunan penyelesaiannya adalah yang bertanda positif.

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \mid -2 < x \leq 3 \text{ atau } x > 4,\ x \in R\}$

Contoh 3.

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $\frac{6}{x+3} \leq \frac{2}{x-5}$.

Jawab

Pada soal di atas, ruas kanan pertidaksamaan tidak sama dengan nol, sehingga perlu diubah ke bentuk umum berikut ini.

$$\frac{6}{x+3} \leq \frac{2}{x-5} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{6}{x+3} - \frac{2}{x-5} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{6(x-5)-2(x+3)}{(x+3)(x-5)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{6x-30-2x-6}{(x+3)(x-5)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{4x-36}{(x+3)(x-5)} \leq 0$$

Titik kritis (pembuat nol):

Pada pembilang: $4x - 36 = 0 \Leftrightarrow x = 9$

Pada penyebut: $x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ (tidak termasuk penyelesaian)

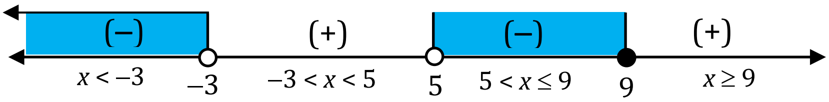
$x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$ (tidak termasuk penyelesaian)

Gambar letak titik kritis (pembuat nol) pada garis bilangan dan pengujian tanda setiap daerah (interval)

- untuk daerah $x < -3$, ambil $x = -4$ $\Rightarrow \frac{4(-4)-36}{(-4+3)(-4-5)} \Leftrightarrow \frac{(-)}{(-)(-)} = (-)$
- untuk daerah $-3 < x < 5$, ambil $x = 0$ $\Rightarrow \frac{4(0)-36}{(0+3)(0-5)} \Leftrightarrow \frac{(-)}{(+)(-)} = (+)$
- untuk daerah $5 < x \leq 9$, ambil $x = 6$ $\Rightarrow \frac{4(6)-36}{(6+3)(6-5)} \Leftrightarrow \frac{(-)}{(+)(+)} = (-)$

- untuk daerah $x \ge 9$, ambil $x = 10$ $\Rightarrow \dfrac{4(10)-36}{(10+3)(10-5)} \Leftrightarrow \dfrac{(+)}{(+)(+)} = (+)$

Sehingga diperoleh tanda untuk setiap daerah seperti gambar berikut.



Pertidaksamaan $\dfrac{6}{x+3} \le \dfrac{2}{x-5} \Leftrightarrow \dfrac{4x-36}{(x+3)(x-5)} \le 0$ memiliki tanda ≤ 0, berarti himpunan penyelesaiannya adalah yang bertanda negatif atau nol.

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \mid x < -3 \text{ atau } 5 < x \le 9,\ x \in R\}$

Catatan

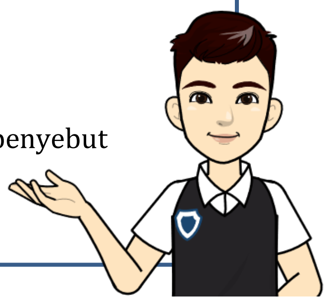
Hal yang **tidak dibenarkan** dalam penyederhanaan bentuk pertidaksamaan rasional karena akan mengubah domain fungsi, yaitu:

1. Perkalian silang ruas kiri dan ruas kanan

$$\frac{f(x)}{g(x)} \le k \quad \not\equiv \quad f(x) \le k \times g(x)$$

2. Mencoret faktor yang sama pada pembilang dan penyebut

$$\frac{p(x).q(x)}{h(x).q(x)} \le 0 \quad \not\equiv \quad \frac{p(x)}{h(x)} \le 0$$



Pertidaksamaan Rasional yang Memuat Faktor Persekutuan Pembilang dan Penyebut

Apabila terdapat faktor persekutuan pada pembilang dan penyebut dari suatu pertidaksamaan rasional, maka kita tidak boleh menyederhanakan pertidaksamaan tersebut dengan cara mencoret faktor persekutuan itu.

Contoh 4.

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $\dfrac{x^2+2x-15}{x-3} \ge 0$.

Jawab

Faktorkan pembilang ke faktor linear

$$\frac{x^2+2x-15}{x-3} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{(x-3)(x+5)}{x-3} \ge 0$$

Pada pertidaksamaan di atas, terdapat faktor persekutuan pada pembilang dan penyebut, yaitu $(x-3)$. Kita tidak boleh menyederhanakan dengan mencoret faktor persekutuan tersebut.

$$\frac{\cancel{(x-3)}(x+5)}{\cancel{x-3}} \ge 0 \quad \not\Leftrightarrow \quad (x-5) \ge 0$$

Lalu bagaimana solusinya? Nah, untuk masalah ini kita dapat selesaikan dengan cara mengalikan kedua ruas pertidaksamaan dengan bentuk kuadrat dari faktor persekutuan tersebut, yaitu $(x-3)^2$ dengan syarat $x \ne 3$.

Bentuk $(x - 3)^2$ dimana $x \neq 3$ sudah jelas bernilai positif, sehingga perkalian kedua ruas dengan bentuk $(x - 3)^2$ dimana $x \neq 3$ tidak akan mengubah tanda pertidaksamaan.

Sehingga diperoleh:

$$\frac{x^2+2x-15}{x-3} \geq 0 \iff \frac{(x-3)(x+5)}{x-3} \geq 0$$

$$\iff \frac{(x-3)(x+5)}{x-3} \times (x-3)^2 \geq 0 \times (x-3)^2 \text{, dimana } x \neq 3$$

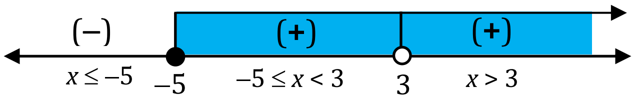
$$\iff (x+5)(x-3)^2 \geq 0 \text{, dimana } x \neq 3$$

Nilai kritis : $x + 5 = 0 \iff x = -5$

$x - 3 = 0 \iff x = 3$ (ingat, nilai $x = 3$ tidak termasuk penyelesaian)

Gambar letak titik kritis (pembuat nol) pada garis bilangan dan pengujian tanda setiap daerah (interval)

- untuk daerah $x \leq -5$, ambil $x = -6$ $\Rightarrow$ $(-6 + 5)(-6 - 3)^2 \Leftrightarrow (-).(+) = (-)$
- untuk daerah $-5 \leq x < 3$, ambil $x = 0$ $\Rightarrow$ $(0 + 5)(0 - 3)^2 \Leftrightarrow (+).(+) = (+)$
- untuk daerah $x > 3$, ambil $x = 4$ $\Rightarrow$ $(4 + 5)(4 - 3)^2 \Leftrightarrow (+).(+) = (+)$



Pertidaksamaan $\frac{x^2+2x-15}{x-3} \geq 0$ memiliki tanda ≥ 0, berarti himpunan penyelesaiannya adalah yang bertanda positif atau nol.

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \mid x \geq -5 \text{ dan } x \neq 3,\ x \in R\}$

Pertidaksamaan Rasional yang Memuat Fungsi Definit

Pada materi fungsi kuadrat, kita mengenal ada fungsi yang selalu bernilai positif untuk setiap x bilangan real, disebut **definit positif**. Demikian juga ada fungsi yang selalu bernilai negatif untuk setiap x bilangan real, disebut **definit negatif**.

Fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$ dengan nilai diskriminan D = $b^2 - 4ac$ dikatakan definit positif jika $a > 0$ dan D < 0. Fungsi $f(x) = ax^2 + bx + c$ dikatakan definit negatif jika $a < 0$ dan D < 0.

Nah, jika suatu pertidaksamaan rasional memuat fungsi definit, maka kita dapat menentukan penyelesaiannya dengan menggunakan cara berikut.

Pertidaksamaan rasional memuat fungsi definit

- Fungsi definit positif dalam suatu pertidaksamaan rasional dapat dihilangkan (diabaikan) dan tanda pertidaksamaan tetap.
- Fungsi definit negatif dalam suatu pertidaksamaan rasional dapat dihilangkan (diabaikan) tetapi dengan syarat tanda pertidaksamaan harus dibalik.

Contoh 5.

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $\dfrac{x-2}{x^3+2x}<0$.

Jawab

$$\frac{x-2}{x^3+2x}<0 \iff \frac{x-2}{x(x^2+2)}<0$$

(x^2 + 2) merupakan fungsi definit positif. Ini dapat dilihat dari nilai a = 1 > 0 dan D = 0^2 – 4(1)(2) = –8 < 0. (Ingat, syarat definit positif adalah a > 0 dan D < 0)

Jadi, (x^2 + 1) dapat dihilangkan dan tanda pertidaksamaan tetap, sehingga diperoleh:

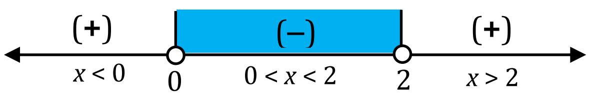
$$\frac{x-2}{x^3+2x}<0 \iff \frac{x-2}{x}<0$$

Titik kritis (pembuat nol)

Pada pembilang: $x - 2 = 0 \iff x = 2$ (tidak termasuk penyelesaian karena tanda "<")
Pada penyebut: $x = 0$ (tidak termasuk penyelesaian)

Gambar letak titik kritis pada garis bilangan dan pengujian tanda setiap interval:

- untuk daerah $x < 0$, ambil $x = -1$ $\Rightarrow \dfrac{(-1)-2}{(-1)} \iff \dfrac{(-)}{(-)}=(+)$
- untuk daerah $0 < x < 2$, ambil $x = 1$ $\Rightarrow \dfrac{1-2}{1} \iff \dfrac{(-)}{(+)}=(-)$
- untuk daerah $x > 2$, ambil $x = 3$ $\Rightarrow \dfrac{3-2}{3} \iff \dfrac{(+)}{(+)}=(+)$



Pertidaksamaan $\dfrac{x-2}{x^3+2x}<0 \iff \dfrac{x-2}{x}<0$ memiliki tanda < 0, berarti himpunan penyelesaiannya adalah yang bertanda negatif.

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \mid 0 < x < 2,\ x \in R\}$.

Contoh 6.

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $\dfrac{-x^2+x-1}{x^2-3x-4}\geq 0$.

Jawab

$$\frac{-x^2+x-1}{x^2-3x-4}\geq 0 \iff \frac{-x^2+x-1}{(x+1)(x-4)}\geq 0$$

($-x^2 + x$ – 1) merupakan fungsi definit negatif. Ini dapat dilihat dari nilai a = –1 < 0 dan D = 1^2 – 4(–1)(–1) = –3 < 0. (Ingat, syarat definit negatif adalah a < 0 dan D < 0)

Jadi, ($-x^2$ + x – 1) dapat dihilangkan tetapi tanda pertidaksamaan harus dibalik, sehingga diperoleh:

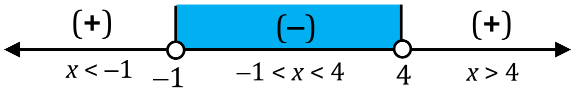
$$\frac{-x^2+x-1}{(x+1)(x-4)} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{(x+1)(x-4)} \leq 0$$

Titik kritis (pembuat nol)

Pada penyebut: $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ (tidak termasuk penyelesaian)
$x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ (tidak termasuk penyelesaian)

Gambar letak titik kritis pada garis bilangan dan pengujian tanda setiap interval:

- untuk daerah $x < -1$, ambil $x = -2$ $\Rightarrow \dfrac{1}{(-2+1)(-2-4)} \Leftrightarrow \dfrac{(+)}{(-)(-)} = (+)$
- untuk daerah $-1 < x < 4$, ambil $x = 0$ $\Rightarrow \dfrac{1}{(0+1)(0-4)} \Leftrightarrow \dfrac{(+)}{(+)(-)} = (-)$
- untuk daerah $x > 4$, ambil $x = 5$ $\Rightarrow \dfrac{1}{(5+1)(5-4)} \Leftrightarrow \dfrac{(+)}{(+)(+)} = (+)$



Pertidaksamaan $\dfrac{-x^2+x-1}{x^2-3x-4} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{(x+1)(x-4)} \leq 0$ memiliki tanda ≤ 0, berarti himpunan penyelesaiannya adalah yang bertanda negatif atau nol.

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \mid -1 < x < 4,\ x \in R\}$.

Contoh 7.

Ketika suatu telepon genggam (*handphone*) baru diluncurkan di pasar, penjualan mingguan umumunya meningkat secara cepat dalam suatu periode waktu tertentu. Selanjutnya penjualan mingguan mulai menurun. Misalnya penjualan mingguan telepon genggam tersebut t minggu setelah diluncurkan dinyatakan oleh $P = \dfrac{200t}{t^2+100}$ dengan P dalam ratusan. Kapan penjualan mencapai 800 unit atau lebih per minggu?

Jawab

Banyak penjualan per minggu adalah $P = \dfrac{200t}{t^2+100}$ dengan P dalam ratusan.

Penjualan mencapai 800 unit atau lebih per minggu, berarti diperoleh pertidaksamaan:

$$P \geq 8 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{200t}{t^2+100} \geq 8$$

Interval waktu penjualan mencapai 800 unit atau lebih per minggu dapat diperoleh dengan mencari himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $\dfrac{200t}{t^2+100} \geq 8$.

$$\frac{200t}{t^2+100} \geq 8 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{200t}{t^2+100} - 8 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{200t - 8(t^2+100)}{t^2+100} \geq 0$$ .... (samakan penyebut)

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-8t^2+200t-800}{t^2+100} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-t^2+25t-100}{t^2+100} \geq 0 \quad \text{……… (kedua ruas dikali } \frac{1}{8}\text{)}$$

(t^2 + 100) merupakan fungsi definit positif. Ini dapat dilihat dari nilai a = 1 > 0 dan D = 0^2 – 4(1)(100) = –400 < 0. (Ingat, syarat definit positif adalah a > 0 dan D < 0)

Jadi, (t^2 + 1) dapat dihilangkan dan tanda pertidaksamaan tetap, sehingga diperoleh:

$$\frac{-t^2+25t-100}{t^2+100} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -t^2+25t-100 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad t^2-25t+100 \leq 0 \quad \text{…….. kedua ruas dikali } (-1)$$

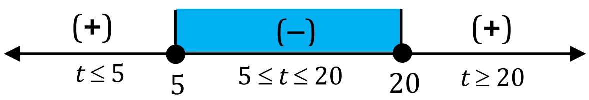
$$\Leftrightarrow \quad (t-5)(t-20) \leq 0$$

Titik kritis (pembuat nol)

t – 5 = 0 $\Leftrightarrow$ t = 5
t – 20 = 0 $\Leftrightarrow$ t = 20

Gambar letak titik kritis pada garis bilangan dan pengujian tanda setiap interval:

- untuk daerah $t \leq 5$, ambil t = 4 $\Rightarrow$ $(4-5)(4-20) \Leftrightarrow (-)(-) = (+)$
- untuk daerah $5 \leq t < 20$, ambil t = 6 $\Rightarrow$ $(6-5)(6-20) \Leftrightarrow (+)(-) = (-)$
- untuk daerah $t \geq 20$, ambil t = 21 $\Rightarrow$ $(21-5)(21-20) \Leftrightarrow (+)(+) = (+)$



Pertidaksamaan $(t-5)(t-20) \leq 0$ memiliki tanda ≤ 0, berarti himpunan penyelesaiannya adalah yang bertanda negatif atau nol, yaitu $5 \leq t < 20$.

Jadi, penjualan telepon genggam mencapai 800 unit atau lebih setelah diluncurkan di pasar antara 5 minggu sampai 20 minggu.

C. Rangkuman

- Pertidaksamaan rasional adalah pertidaksamaan berbentuk pecahan dimana pembilang dan menyebutnya mengandung variabel atau penyebutnya saja yang mengandung variabel.
- Bentuk umum dari pertidaksamaan rasional atau pertidaksamaan pecahan adalah:

  $$\frac{f(x)}{g(x)} < 0 \text{ atau } \frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$$

  $$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \text{ atau } \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$$

  dengan $f(x)$ sebagai fungsi pembilang dan g(x) sebagai fungsi penyebut dan g(x)$\neq$ 0.
- Hal yang tidak dibenarkan dalam penyederhanaan bentuk pertidaksamaan rasional karena akan mengubah domain fungsi, yaitu:

a. Perkalian silang ruas kiri dan ruas kanan

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq k \quad \not\equiv \quad f(x) \leq k \times g(x)$$

b. Mencoret faktor yang sama pada pembilang dan penyebut

$$\frac{p(x).q(x)}{h(x).q(x)} \leq 0 \quad \not\equiv \quad \frac{p(x)}{h(x)} \leq 0$$

- Pertidaksamaan rasional yang memuat fungsi definit dapat diselesaikan dengan cara:

  a. Fungsi definit positif dapat dihilangkan dan tanda pertidaksamaan tetap.

  b. Fungsi definit negatif dapat dihilangkan tetapi dengan syarat tanda pertidaksamaan harus dibalik.

D. Latihan Soal

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan berikut:

1. $\dfrac{x+1}{x-2} > 0$

2. $\dfrac{2x-7}{x-5} \leq 3$

3. $\dfrac{1}{x-1} \leq \dfrac{1}{2x+1}$

4. $\dfrac{x^2-3x+2}{(x+1)^2(x+2)} < 0$

5. $\dfrac{x^2-5x+6}{x-1} \leq x+2$

6. Tentukan interval nilai *x* agar grafik dari $y = \dfrac{x^2-9}{x^2-6x+5}$ terletak di atas sumbu X.

7. Misalkan sebuah partikel bergerak dengan mengikuti lintasan $y = \dfrac{3}{x-1}$ dengan *y* menyatakan ketinggian yang dicapai dengan satuan meter dan *x* untuk bilangan real positif. Tentukan batas interval *x* agar ketinggian yang dicapai tidak melebihi 12 meter.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2
PERTIDAKSAMAAN IRASIONAL SATU VARIABEL

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 2 ini diharapkan kalian dapat menjelaskan konsep pertidaksamaan irasional dan menentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan irasional, serta menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan pertidaksamaan irasional satu variabel.

B. Uraian Materi

Pertidaksamaan irasional atau pertidaksamaan bentuk akar adalah suatu pertidaksamaan yang mengandung variabel pada bentuk akarnya.

Untuk semesta bilangan real, pertidaksamaan irasional akan terdefinisi jika syarat akar terpenuhi yaitu fungsi yang berada dibawah tanda akar bernilai lebih dari atau sama dengan nol.

Contoh pertidaksamaan irasional:

- $\sqrt{x-1}<3$
- $\sqrt{x+3}\geq\sqrt{2x-4}$
- $\sqrt{4x^2+1}\leq 6-x$
- $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}<9$

Bentuk-bentuk pertidaksamaan irasional (bentuk akar) dan cara menentukan himpunan penyelesaiannya sebagai berikut:

1. Bentuk $\sqrt{f(x)}>c$ atau $\sqrt{f(x)}<c$

a. Bentuk $\sqrt{f(x)}>c$ dengan $c > 0$

Syarat untuk menentukan penyelesaian adalah:
(i). $f(x) \geq 0$
(ii). $f(x) > a^2$ (kuadratkan kedua ruas)

Solusi dari pertidaksamaan adalah irisan dari (i) dan (ii).

Bentuk $\sqrt{f(x)}>c$ dengan $c < 0$ cukup diselesaikan dengan $f(x) \geq 0$.

Contoh 1.

Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan $\sqrt{2x-2}>4$

Jawab
Syarat:
(i). $2x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 2 \Leftrightarrow \boldsymbol{x \geq 1}$
(ii). $2x - 2 > 4^2 \Leftrightarrow 2x > 16 + 2$
$\Leftrightarrow 2x > 18 \Leftrightarrow \boldsymbol{x > 9}$

Irisan dari (i) dan (ii) adalah $x > 9$.

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \mid x > 9, x \in R\}$

Contoh 2.

Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan $\sqrt{2x-6} > -1$

Jawab

Karena ruas kanan < 0, maka penyelesaiannya adalah $2x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 6$
$\Leftrightarrow x \geq 3$
Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \mid x \geq 3, x \in R\}$

b. Bentuk $\sqrt{f(x)} < c$ dengan $c > 0$

Syarat untuk menentukan penyelesaian adalah:
(i). $f(x) \geq 0$
(ii). $f(x) < a^2$ (kuadratkan kedua ruas)

Solusi dari pertidaksamaan adalah irisan dari (i) dan (ii).

Contoh 3.

Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan $\sqrt{3x+1} \leq 4$

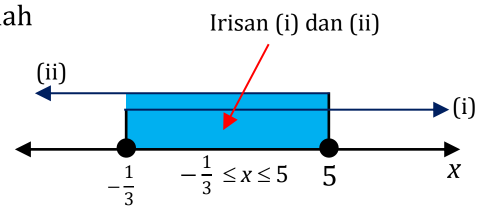
Jawab

Syarat:

(i). $3x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow 3x \geq -1 \Leftrightarrow \boldsymbol{x \geq -\frac{1}{3}}$

(ii). $3x + 1 \leq 4^2 \Leftrightarrow 3x + 1 \leq 16$
$\Leftrightarrow 3x \leq 16 - 1$
$\Leftrightarrow 3x \leq 15 \Leftrightarrow \boldsymbol{x \leq 5}$

Irisan dari (i) dan (ii) adalah



Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \mid -\frac{1}{2} \leq x \leq 5, x \in R\}$

2. Bentuk $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$ atau $\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)}$

a. Bentuk $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$

Syarat untuk menentukan penyelesaian adalah:
(i). $f(x) \geq 0$
(ii). $g(x) \geq 0$
(iii). $f(x) > g(x)$ (kuadratkan kedua ruas)

Solusi dari pertidaksamaan adalah irisan dari (i), (ii), dan (iii).

Contoh 4.

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $\sqrt{x+4} > \sqrt{2x-1}$

Jawab

Syarat:

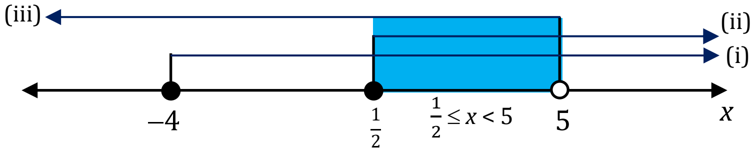
(i). $x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -4$

(ii). $2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq ½$

(iii). Kuadratkan kedua ruas:

$$\sqrt{x+4} > \sqrt{2x-1} \Leftrightarrow x + 4 > 2x - 1$$
$$\Leftrightarrow x - 2x > -1 - 4$$
$$\Leftrightarrow -x > -5$$
$$\Leftrightarrow x < 5$$

Irisan dari (i), (ii), dan (iii) diperoleh:



Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \mid ½ \leq x < 5, x \in R\}$

b. Bentuk $\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)}$

Syarat untuk menentukan penyelesaian adalah:

(i). $f(x) \geq 0$

(ii). $g(x) \geq 0$

(iii). $f(x) < g(x)$ (kuadratkan kedua ruas)

Solusi dari pertidaksamaan adalah irisan dari (i), (ii), dan (iii).

Contoh 5.

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $\sqrt{x^2 - 2x} < \sqrt{3x - 6}$

Jawab

Syarat:

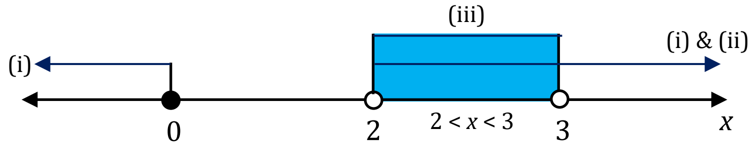
(i). $x^2 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x(x - 2) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$ atau $x \geq 2$

(ii). $3x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow 3x \geq 6 \Leftrightarrow x \geq 2$

(iii). Kuadratkan kedua ruas:

$$\sqrt{x^2 - 2x} < \sqrt{3x - 6} \Leftrightarrow x^2 - 2x < 3x - 6$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 < 0$$
$$\Leftrightarrow (x - 2)(x - 3) < 0$$
$$\Leftrightarrow 2 < x < 3$$

Irisan dari (i), (ii), dan (iii) diperoleh:



Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \mid 2 < x < 3, x \in R\}$

3. Bentuk $\sqrt{f(x)} > g(x)$ atau $\sqrt{f(x)} < g(x)$

a. Bentuk $\sqrt{f(x)} < g(x)$

Syarat untuk menentukan penyelesaian adalah:

(i). $f(x) \geq 0$

(ii). $g(x) > 0$

(iii). $f(x) < (g(x))^2$ (kuadratkan kedua ruas)

Solusi dari pertidaksamaan adalah irisan dari (i), (ii), dan (iii).

Contoh 6.

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $\sqrt{4-x^2} < x+2$

Jawab

Syarat:

(i). $4-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2-4 \leq 0$ …….. kedua ruas dikali dengan (-1)

$\Leftrightarrow (x+2)(x-2) \leq 0$

$\Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$

(ii). $x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$

(iii). Kuadratkan kedua ruas

$4-x^2 < (x+2)^2 \Leftrightarrow 4-x^2 < x^2+4x+4$

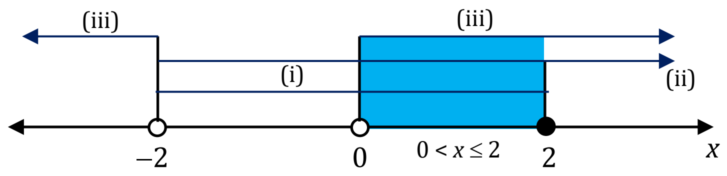
$\Leftrightarrow 0 < x^2+4x+4+x^2-4$

$\Leftrightarrow 2x^2+4x > 0$

$\Leftrightarrow x(x+2) > 0$

$\Leftrightarrow x < -2$ atau $x > 0$

Irisan dari (i), (ii), dan (iii) diperoleh:



Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \mid 0 < x \leq 2, x \in R\}$

b. Bentuk $\sqrt{f(x)} > g(x)$

Syarat untuk menentukan penyelesaian adalah:

Solusi (1)

(i). $f(x) \geq 0$

(ii). $g(x) \geq 0$

(iii). $f(x) > (g(x))^2$ (kuadratkan kedua ruas)

Solusi (1) adalah irisan dari (i), (ii), dan (iii).

Solusi (2)

(iv). $f(x) \geq 0$

(v). $g(x) < 0$

Solusi (2) adalah irisan dari (iv) dan (v).

Solusi dari pertidaksamaan adalah **gabungan dari solusi (1) dan (2)**.

Contoh 7.

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $\sqrt{x+15} > x+3$

Jawab

Solusi (1)

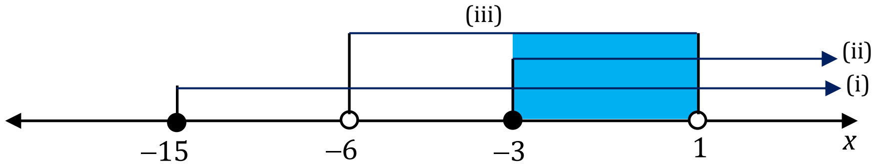
(i). $x + 15 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -15$

(ii). $x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$

(iii). Kuadratkan kedua ruas

$$
\begin{aligned}
x+15>(x+3)^2 \quad &\Leftrightarrow \quad x+15>x^2+6x+9 \\
&\Leftrightarrow \quad 0>x^2+6x+9-x-15 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2+5x-6<0 \\
&\Leftrightarrow \quad (x+6)(x-1)<0 \\
&\Leftrightarrow \quad -6<x<1
\end{aligned}
$$

Irisan dari (i), (ii), dan (iii) adalah



Diperoleh Solusi (1) yaitu $\{-3 \le x < 1\}$

Solusi (2)
(iv). $x + 15 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -15$
(v). $x + 3 < 0 \Leftrightarrow x < -3$

Irisan dari (iv) dan (v) adalah

Diperoleh Solusi (2) yaitu $\{-15 \le x < -3\}$

Solusi pertidaksamaan adalah gabungan dari Solusi (1) dan (2) yaitu
$\{-3 \le x < 1\} \cup \{-15 \le x < -3\} = \{-15 \le x < 1\}$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \mid -15 \le x < 1, x \in R\}$

Contoh 8.

Sebuah sepeda melaju di jalan raya selama t menit dengan panjang lintasan (dalam meter) ditentukan oleh persamaan berikut :

$$S(t)=\sqrt{t^2-20t+550}$$

Jika panjang lintasan sepeda sekurang-kurangnya adalah 25 meter, tentukan nilai t yang memenuhi!

Jawab

Karena panjang lintasan sepeda diketahui sekurang-kurangnya adalah 25 meter, maka $S(t)$ lebih besar atau sama dengan 25, sehingga berlaku

$$
\begin{aligned}
S(t)\ge 25 \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{t^2-20t+550}\ge 25 \\
&\Leftrightarrow \quad t^2-20t+550\ge (25)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad t^2-20t+550\ge 625 \\
&\Leftrightarrow \quad t^2-20t-75\ge 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (t-5)(t-15)\ge 0 \\
&\Leftrightarrow \quad t \le 5 \text{ atau } t\ge 15
\end{aligned}
$$

diperoleh $t \le 5$ atau $t \ge 15$.

Syarat tambahan: $t^2 - 20t + 550 \geq 0$

Pertidaksamaan $t^2 - 20t + 550 \geq 0$ selalu positif untuk setiap nilai t, karena definit positif (a = 1 > 0 dan Diskriminan D = $(-20)^2 - 4(1)(550) = -1.800 < 0$).

Dengan demikian, nilai t yang memenuhi agar panjang lintasan sepeda sekurang-kurangnya adalah 25 meter adalah $t \leq 5$ menit atau $t \geq 15$ menit.

C. Rangkuman

- Pertidaksamaan irasional atau pertidaksamaan bentuk akar adalah suatu pertidaksamaan yang mengandung variabel pada bentuk akarnya.
- Bentuk-bentuk pertidaksamaan irasional dan solusinya:

a. Bentuk $\sqrt{f(x)} > c$ dengan $c > 0$

Syarat untuk menentukan penyelesaian adalah:
(i). $f(x) \geq 0$
(ii). $f(x) > a^2$ (kuadratkan kedua ruas)
Solusi dari pertidaksamaan adalah irisan dari (i) dan (ii).

Bentuk $\sqrt{f(x)} > c$ dengan $c < 0$ cukup diselesaikan dengan $f(x) \geq 0$.

b. Bentuk $\sqrt{f(x)} < c$ dengan $c > 0$

Syarat untuk menentukan penyelesaian adalah:
(i). $f(x) \geq 0$
(ii). $f(x) < a^2$ (kuadratkan kedua ruas)
Solusi dari pertidaksamaan adalah irisan dari (i) dan (ii).

c. Bentuk $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$

Syarat untuk menentukan penyelesaian adalah:
(i). $f(x) \geq 0$
(ii). $g(x) \geq 0$
(iii). $f(x) > g(x)$ (kuadratkan kedua ruas)

Solusi dari pertidaksamaan adalah irisan dari (i), (ii), dan (iii).

d. Bentuk $\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)}$

Syarat untuk menentukan penyelesaian adalah:
(i). $f(x) \geq 0$
(ii). $g(x) \geq 0$
(iii). $f(x) < g(x)$ (kuadratkan kedua ruas)
Solusi dari pertidaksamaan adalah irisan dari (i), (ii), dan (iii).

e. Bentuk $\sqrt{f(x)} < g(x)$

Syarat untuk menentukan penyelesaian adalah:
(i). $f(x) \geq 0$
(ii). $g(x) > 0$
(iii). $f(x) < (g(x))^2$ (kuadratkan kedua ruas)
Solusi dari pertidaksamaan adalah irisan dari (i), (ii), dan (iii).

f. Bentuk $\sqrt{f(x)} > g(x)$

Syarat untuk menentukan penyelesaian adalah:

Solusi (1)

(iv). $f(x) \geq 0$

(v). $g(x) \geq 0$

(vi). $f(x) > (g(x))^2$ (kuadratkan kedua ruas)

Solusi (1) adalah irisan dari (i), (ii), dan (iii).

Solusi (2)

(vi). $f(x) \geq 0$

(vii). $g(x) < 0$

Solusi (2) adalah irisan dari (iv) dan (v).

Solusi dari pertidaksamaan adalah **gabungan dari solusi (1) dan (2)**.

D. Latihan Soal

Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan di bawah ini.

1. $\sqrt{1-2x} \geq 3$
2. $\sqrt{x^2-x-12} \leq x-2$
3. $\sqrt{3x+1} \geq x-3$
4. $\sqrt{2x+1} \geq \sqrt{4x-8}$
5. $\sqrt{x^2-2x} < \sqrt{3x-6}$
6. Perusahaan asuransi melakukan perhitungan premi yang akan dibayarkan kepada pemegang polis dalam kurun waktu tertentu. Besar premi yang akan dibayarkan memenuhi persamaan berikut :

$$p(t) = 2 + \sqrt{4t+4}$$

Tentukan batas kurun waktu t (dalam bulan) yang diperlukan oleh pemegang polis agar mendapat premi paling banyak 6 unit.