KEGIATAN PEMBELAJARAN 1

Pengertian dan Lingkup Vektor pada Bidang Datar

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini diharapkan Anda dapat mengetahui pengertian vektor dan ruang lingkup vektor yang meliputi:

1. Komponen-komponen dari vektor.
2. Menuliskan notasi-notasi vektor.
3. Menggambarkan vektor apabila diberikan komponen-komponennya.
4. Kesamaan dua vektor.
5. Vektor nol.
6. Vekktor posisi.
7. Vektor satuan.

B. Uraian Materi

Pengertian Vektor Pada Bidang Datar

Ketika Anda sedang melakukan perjalanan ke suatu tempat pasti Anda sering menemukan papan petunjuk arah seperti papan petunjuk arah berikut:

Gambar 1.1 Papan Petunjuk Arah.

Untuk sampai pada kota yang diinginkan pengguna jalan harus mengikuti arah dan menempuh jarak yang ditentukan. Misalnya untuk mencapai kota Bandar Lampung, Anda harus membelok ke arah kiri dan menempuh jarak sejauh 8 km dari lokasi papan petunjuk tersebut atau kalau Anda mau ke kota Palembang, Anda harus membelok ke kanan dan menempuh jarak sejauh 360 km dari papan petunjuk. Dengan demikian ada dua hal yang harus diperhatikan, yaitu arah dan jarak (besar) yang harus ditempuh.

Pernahkah Anda melihat lembing yang meluncur di udara saat dilempar oleh atlet lempar lembing? Atau anak panah yang terlepas dari busurnya saat seorang atlet memanah ke arah papan sasaran? Lembing atau anak panah tersebut meluncur dengan kecepatan dan arah tertentu sesuai dengan keinginan sang atlet. Hal yang sama ketika Anda melihat tentara terjun payung atau anak kecil main jungkitan di taman.

Gambar 1.2. Lempar Lembing

Gambar 1.3. Memanah

Sumber: www. https://darunnajah.com

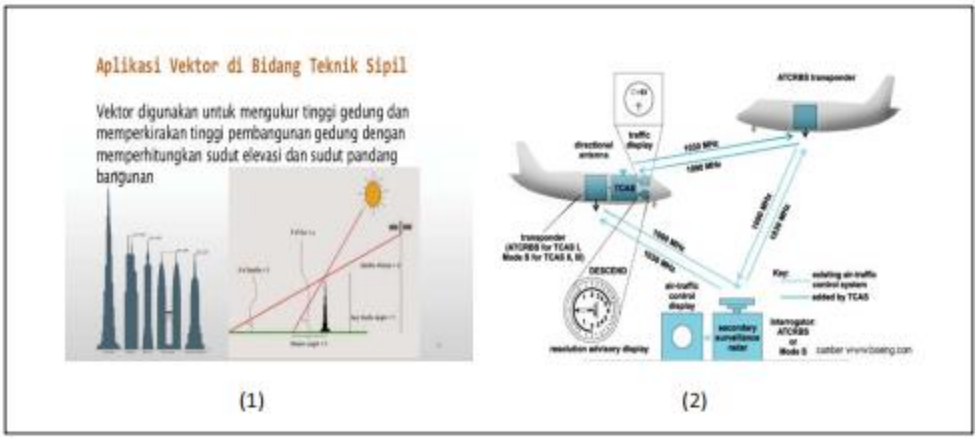
Gambar 1.4 Terjun payung

Gambar 1.5 Anak kecil main Jungkitan

Seluruh ilustrasi yang Anda baca di atas berkaitan dengan arah dan jarak. Tentang arah dan jarak sudah Anda pelajari waktu di SMP dalam pelajaran IPA Fisika. Banyak contoh besaran fisika yang memiliki arah dan besar seperti uraian di atas, antara lain: kecepatan, percepatan, gaya, dan sebagainya.

Besaran yang mempunyai arah dan besar biasanya dinyatakan dengan ruas garis berarah. Ruas garis berarah tersebut dinamakan ***vektor***. Konsep vektor pada IPA Fisika adalah besaran yang mempunyai besar dan arah. Besaran yang hanya memiliki besar saja disebut **skalar**, seperti berat, panjang, luas dan lain-lain. Sementara itu konsep vektor dalam metematika adalah ruas garis berarah yang panjangnya adalah jarak dari titik pangkal ke titik ujung dan arahnya adalah arah dari pangkal ke ujung atau perpanjangannya. Panjang ruas garis berarah menyatakan besar vektor, sedangkan arah vektor dinyatakan oleh kemiringan ruas garis dan anak panahnya.

Dalam kehidupan sehari-hari vektor banyak digunakan dalam berbagai aktivitas dan berbagai bidang kehidupan. Vektor sangat bermanfaat dalam kehidupan sehari-hari seperti dalam bidang teknik sipil, navigasi, militer dan lain-lain.



Gambar 1.6

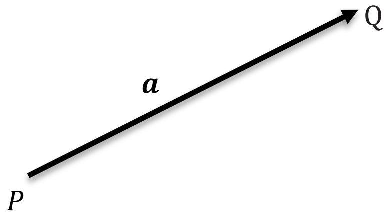
Sumber: (1) *https://www.google.co.id/search?q=penerapan+vektor+dalam+teknik+sipil*
(2) *https://fisikakelompok7.blogspot.com*

Gambar 1.6.(1) Contoh pemanfaatn vektor dalam teknik sipil dan gambar 1.6.(2) dalam bidang navigasi.

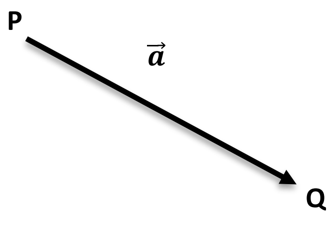
Untuk lebih memahami masalah vektor, coba Anda lakukan aktivitas berikut:
1. Gambarlah sebuah ruas garis pada selembar kertas!
2. Berilah tanda panah pada ujung ruas garis tersebut ini!
3. Sebut titik pangkal ruas garis sebagai titik P dan titik ujungnya sebagai titik Q.
4. Ukurlah panjang ruas garis dengan menggunakan penggaris!
5. Diskusikan dengan temanmu!
6. Apa yang dapat disimpulkan dari aktivitas ini?

Ruas garis berarah yang Anda gambar pada kegiatan ini mewakili sebuah vektor. Panjang garis yang diukur menggunakan penggaris menunjukkan panjang vektor tersebut. Karena titik pangkal *P* dan titik ujung *Q,* maka vektor disebut sebagai vektor $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ dan panjang vektor $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ dilambangkan dengan $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$. Selain cara di atas, sebuah vektor dapat pula ditulis menggunakan:

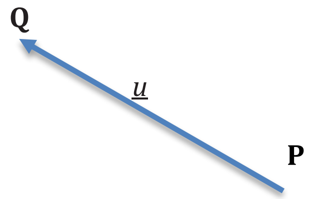
- huruf kecil yang dicetak tebal.
  Seperti $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, dan sebagainya. Misalnya, vektor $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ di bawah ditulis sebagai vektor $\boldsymbol{a}$.



- huruf kecil yang di atas huruf itu dibubuhi tanda panah.
  Seperti $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ dan sebagainya. Misalnya vektor $\overrightarrow{PQ}$ dapat ditulis sebagai vektor $\vec{a}$
  .



- huruf kecil yang di bawah huruf itu dibubuhi tanda garis (garis bawah).
  Seperti $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ dan sebagainya. Misalnya vektor $\overrightarrow{PQ}$ dapat ditulis sebagai vektor $\underline{u}$.



Untuk selanjutnya dalam modul ini akan digunakan penulisan vektor dengan tanda panah di atas. Vektor yang Anda gambarkan di atas adalah contoh penyajian vektor secara **geometris**. Dalam matematika, vektor dapat disajikan secara geometris dan aljabar.

Komponen Vektor

Diantara Anda pasti ada yang pernah bermain *game* menggunakan *playstation,* seperti *game* sepak bola? Ketika bermain *game* sepakbola Anda akan menggerakkan pemain di layar televisi dengan menggerakkan tombol-tombol ke kanan, kiri, atas, bawah, serong kanan bawah, serong kiri atas dan sebagainya. Untuk memindahkan pemain ke arah kanan atas, Anda dapat melakukannya dengan menekan tombol kanan, diikuti dengan menekan tombol atas atau dengan menekan tombol atas, diikuti dengan menekan tombol kanan.

Cara lain yang lebih cepat adalah dengan menekan tombol kanan dan tombol atas secara bersamaan.

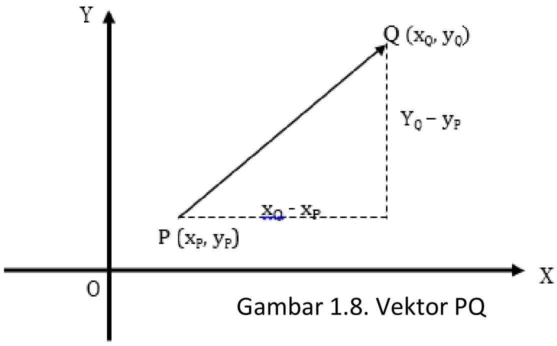
Gambar 1.7 Game Sepak Bola.

Sumber: https://www.yagaming.id/game-sepak-bola-offline-android/

Layar televisi dapat kita umpamakan bidang datar yang dapat digambarkan dengan bidang koordinat Cartesius *XOY*. Pemain-pemain sepakbola merupakan titik-titik yang dapat dipindahkan pada bidang *XOY*. Pemain sepakbola dapat berpindah letak ke segala arah dengan cara seperti uraian di atas. Pada prinsipnya setiap perpindahan letak pemain dapat ditentukan oleh dua komponen, yaitu gerakan ke kanan/kiri dan gerakan ke atas/bawah. Perpindahan letak pemain sepakbola itu merupakan suatu vektor.

Vektor yang digambarkan pada bidang koordinat mempunyai komponen horisontal (gerakan ke kanan/kiri) dan komponen vertikal (gerakan ke atas/bawah).

Contoh 1:



Gambar 1.8. Vektor PQ

Komponen horisontal vektor $\overrightarrow{PQ}$ sebesar $x_Q - x_P$, sedang komponen vertikal vektor $\overrightarrow{PQ}$ sebesar $y_Q - y_P$.

Dalam bentuk aljabar, vektor $\overrightarrow{PQ}$ dapat dinyatakan dalam bentuk matriks kolom:

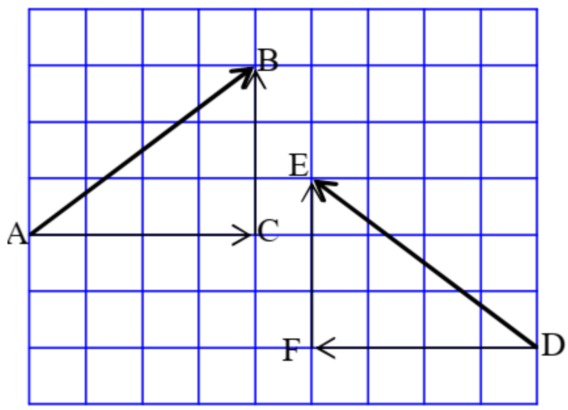
$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} Komponen\ Hosrisontal \\ Komponen\ Vertikal \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_p \end{pmatrix}$$

Dalam bentuk pasangan berurut: $\overrightarrow{PQ} = (x_Q - x_P, y_Q - y_p)$

Atau dalam bentuk vektor basis : $\overrightarrow{PQ} = a_1\vec{\imath} + b_1\vec{\jmath}$

Contoh 2:

Coba Anda perhatikan gambar vektor berikut.



Gambar 1.9. Vektor AB dan DE

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} Komponen\ Horisontal \\ Komponen\ Vertikal \end{pmatrix}$$

Komponen horisontal: $\begin{cases} \text{ke kanan tandanya positif} \\ \text{ke kiri tandanya negatif} \end{cases}$

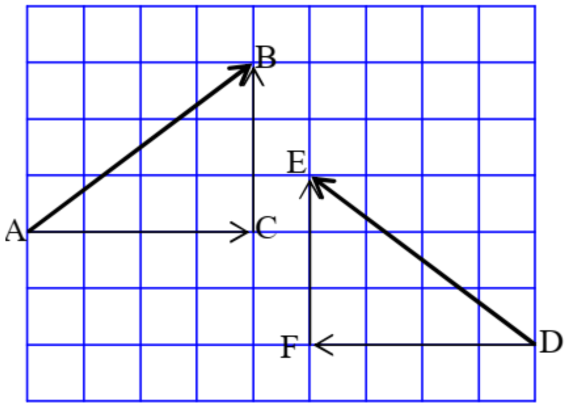
Komponen vertikal: $\begin{cases} \text{ke atas tandanya positif} \\ \text{ke bawah tandanya negatif} \end{cases}$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} A \text{ ke } C \text{ terus} \\ C \text{ ke } B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ke kanan 4} \\ \text{ke atas 3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} D \text{ ke } F \text{ terus} \\ F \text{ ke } E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ke kiri 4} \\ \text{ke atas} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Panjang (Modulus) Vektor

Coba Anda perhatikan kembali gambar berikut:



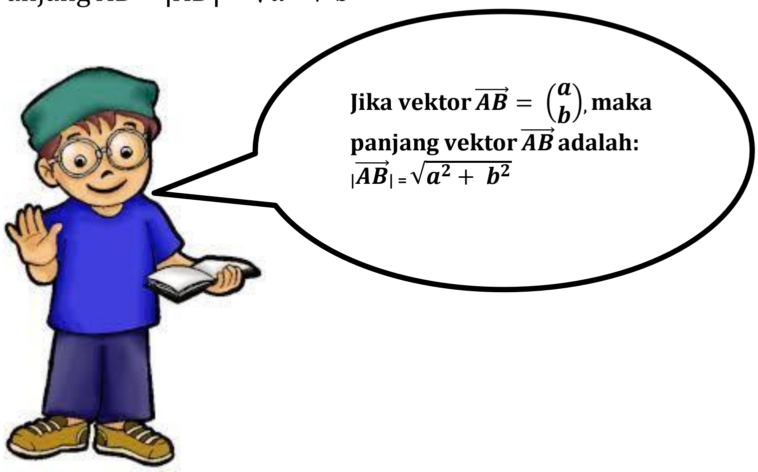
Vektor $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ dan $\overrightarrow{CB}$ membentuk segi tiga siku-siku. Panjang vektor $\overrightarrow{AB}$ bisa kita hitung dengan menggunakan rumus *Pythagoras*.

Panjang $\overrightarrow{AB}$ = $|\overrightarrow{AB}|$ = $\sqrt{(|\overrightarrow{AC}|)^2 + (|\overrightarrow{CB}|)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

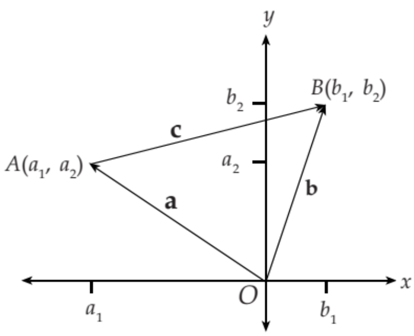
Panjang $\overrightarrow{DE}$ = $|\overrightarrow{DE}|$ = $\sqrt{(|\overrightarrow{DF}|)^2 + (|\overrightarrow{FE}|)^2} = \sqrt{(4)^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

Secara umum jika vektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, maka panjang vektor $\overrightarrow{AB}$ dapat dinyatakan:

Panjang $\overrightarrow{AB}$ = $|\overrightarrow{AB}|$ = $\sqrt{a^2 + b^2}$



Sekarang, perhatikan sebarang titik $A(a_1, a_2)$ dan titik $B(b_1, b_2)$ pada koordinat Cartesius berikut.



Gambar 1.10.

Pada gambar di atas, vektor $\vec{a}$ mewakili ruas garis berarah dari titik pangkal $O(0, 0)$ ke titik $A(a_1, a_2)$. Oleh karena itu, vektor $\vec{\boldsymbol{a}}$ dapat Anda tuliskan dalam bentuk vektor kolom $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$. Adapun vektor $\vec{\boldsymbol{b}}$ mewakili ruas garis berarah dari titik pangkal $O(0, 0)$ ke titik $B(b_1, b_2)$. Vektor $\vec{\boldsymbol{b}}$ dapat Anda tuliskan sebagai $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ Dengan menggunakan rumus jarak, Anda dapat menentukan panjang vektor $\vec{\boldsymbol{a}}$ dan $\vec{\boldsymbol{b}}$, yaitu:

Panjang vektor $\vec{\boldsymbol{a}} = |\vec{\boldsymbol{a}}| = \sqrt{\boldsymbol{a}_1^2 + \boldsymbol{a}_2^2}$

Panjang vektor $\vec{\boldsymbol{b}} = |\vec{\boldsymbol{b}}| = \sqrt{\boldsymbol{b}_1^2 + \boldsymbol{b}_2^2}$

Sekarang Anda perhatikan vektor $\overrightarrow{AB}$. Vektor $\overrightarrow{AB}$ kita dapatkan dengan cara menarik garis dari titik A ke titik B. Seperti yang sudah dipelajari sebelumnya, vektor $\overrightarrow{AB}$ dapat dinyatakan dalam bentuk vektor kolom $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$. Panjang vektor $\overrightarrow{AB}$ adalah:

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$

Contoh 3:

Diketahui segitiga OAB dengan koordinat titik $O(0, 0)$, $A(2, 4)$ dan $B(6, 1)$.

Tentukan:

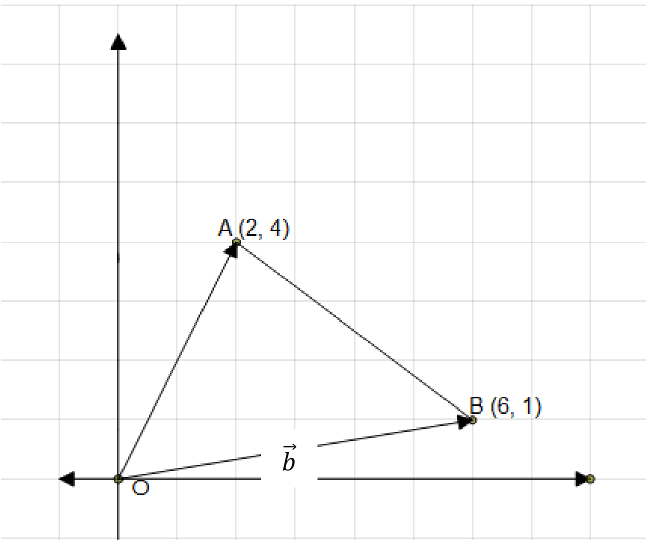
a. Vektor $\vec{a}$ yang mewakili ruas garis dari titik O ke titik A.

b. Vektor $\vec{b}$ yang mewakili ruas garis dari titik O ke titik B.

c. Vektor $\overrightarrow{AB}$ yang mewakili ruas garis dari titik A ke titik B.

d. Panjang vektor $\vec{a}, \vec{b}$ dan $\overrightarrow{AB}$.

Alternatif Penyelesaian:



Gambar 1.11.

a. Dari gambar vektor $\vec{a}$ mewakili ruas garis berarah dari titik pangkal $O(0, 0)$ ke titik $A(2, 4)$, jadi vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

b. Vektor $\vec{b}$ mewakili ruas garis berarah dari titik pangkal $O(0, 0)$ ke titik $B(6, 1)$, jadi vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

c. Vektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6-2 \\ 1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

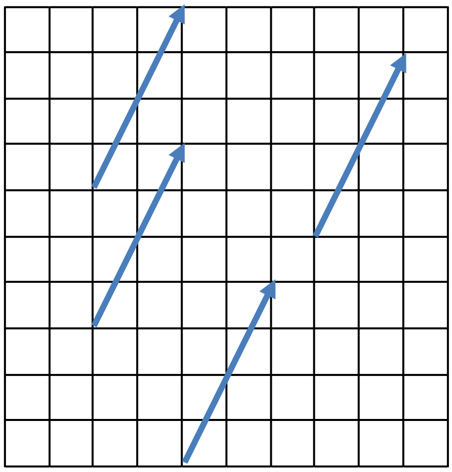
d. Panjang vektor $\vec{a} = |\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Panjang vektor $\vec{b} = |\vec{b}| = \sqrt{6^2 + 1^2} = \sqrt{36 + 1} = \sqrt{37}$

Panjang vektor $\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$

Kesamaan Dua Vektor

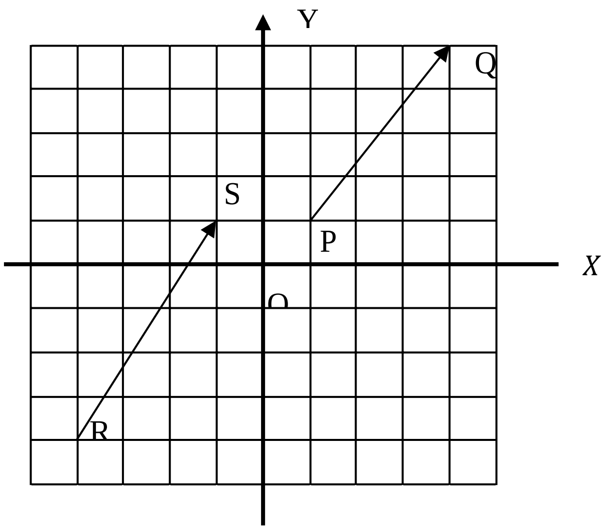
Dua vektor dikatakan sama jika kedua vektor tersebut mempunyai besar dan arah yang sama. Perhatikan gambar berikut.



Gambar 1.12 Vektor Sama

Keempat vektor pada gambar di atas adalah sama karena mempunyai besar dan arah yang sama.

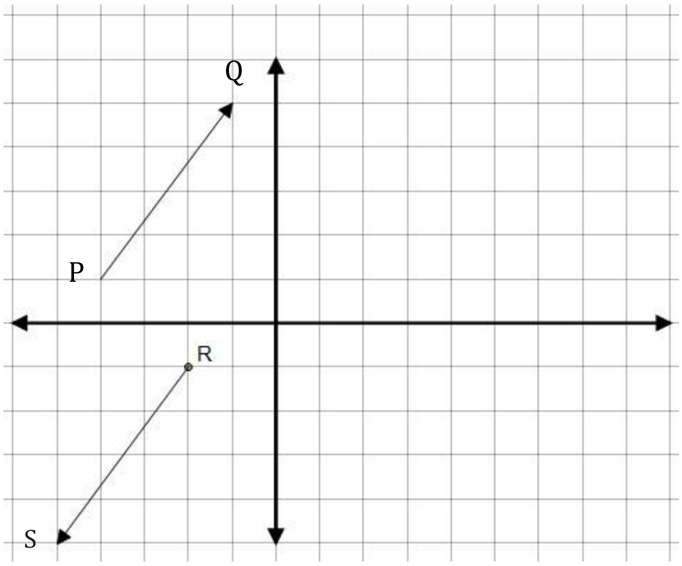
Contoh 4:
Diketahui vektor titik-titik $P(1, 1)$, $Q(4, 5)$, $R(-4, -3)$, $S(-1, 1)$.



Gambar 1.13

Jadi, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$ karena $\overrightarrow{PQ}$ searah $\overrightarrow{RS}$ dan $|\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{RS}|$

Perhatikan gambar berikut.

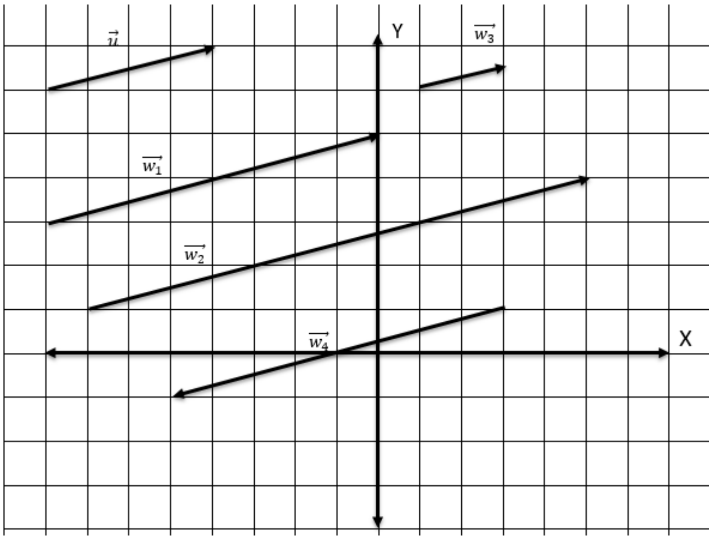


Gambar 1.13

Vektor $\overrightarrow{PQ}$ dengan $\overrightarrow{RS}$ sama panjang dan arahnya berlawanan. Vektor $\overrightarrow{PQ}$ dengan $\overrightarrow{RS}$ merupakan vektor berlawanan dan dapat ditulis : $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{RS}$ atau $-\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$.

Komponen vektor $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ dan komponen vektor $\overrightarrow{RS} = \begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}$.

Coba Anda perhatikan gambar berikut.



Gambar 1.14

Vektor-vektor di atas merupakan vektor yang sejajar. Coba Anda perhatikan komponen vektornya.

$\vec{u} = \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{w_1} = \begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} = 2.\vec{u}$

$\overrightarrow{w_2} = \begin{pmatrix}12\\3\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} = 3.\vec{u}$

$\overrightarrow{w_3} = \begin{pmatrix}2\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\vec{u}$

$\overrightarrow{w_4} = \begin{pmatrix}-8\\-2\end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} = -2\vec{u}$

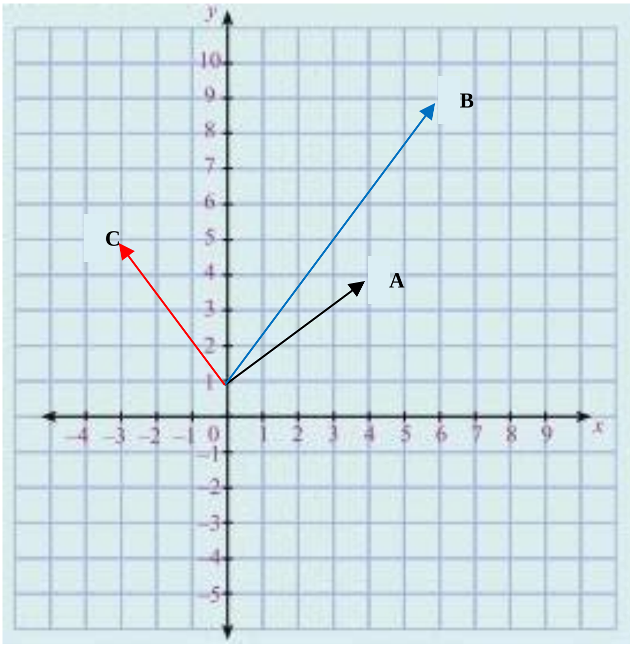
Dari komponen vektor tampak jelas bahwa vektor $\overrightarrow{w_1}$, $\overrightarrow{w_2}$, $\overrightarrow{w_3}$, dan $\overrightarrow{w_4}$ merupakan kelipatan vektor $\vec{u}$. Vektor $\overrightarrow{w_1}$, $\overrightarrow{w_2}$, dan $\overrightarrow{w_3}$, dapat dinyatakan dengan $k.\vec{u}$ dengan k skalar yang bernilai positif, sementara untuk $\overrightarrow{w_4}$ dengan k skalar betnilai negatif.

Vektor Nol

Suatu vektor disebut vektor nol apabila panjangnya nol. Arah dari vektor nol tak tentu, misalnya $\overrightarrow{\mathrm{AA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CC}}$, dan semacamnya disebut **vektor nol**. Vektor nol dilambangkan dengan $\vec{0}$.

Vektor Posisi

Anda perhatikan gambar berikut.



Gambar 1.15

Koordinat titik $A(4, 3)$, titik $B(6, 8)$ dan titik $C(-3, 4)$. Vektor $\overrightarrow{OA}$ memiliki pangkal titik O dan ujung titik A, vektor $\overrightarrow{OB}$ memiliki pangkal titik O dan ujung titik B, vektor $\overrightarrow{OC}$ memiliki pangkal titik O dan ujung titik C.

Dari uraian sebelumnya Anda sudah mengetahui bahwa ruas garis berarah pada gambar mewakili vektor dengan komponen vektor $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$, vektor $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}$ dan vektor $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$. Vektor vektor $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ dan $\overrightarrow{OC}$ disebut vektor posisi.

Vektor posisi suatu titik dapat dilambangkan sesuai dengan **nama titik ujungnya** yang ditulis dengan huruf kecil. Vektor posisi titik A ialah $\vec{a}$, Vektor posisi titik B ialah $\vec{b}$, dan seterusnya. Vektor posisi titik A (a_1, a_2) = $\vec{a}$ = $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$

Pada bidang koordinat *Cartesius*, setiap titik P pada bidang dapat dinyatakan sebagai vektor $\overrightarrow{OP}$. Vektor $\overrightarrow{OP}$ disebut vektor posisi dari titik P. Koordinat titik P merupakan komponen-komponen dari vektor $\overrightarrow{OP}$. Vektor $\overrightarrow{OP}$ dapat dinyatakan sebagai $\vec{p}$.

Vektor Satuan

Vektor satuan adalah vektor yang panjangnya satu satuan.

Vektor satuan dengan arah sumbu X, dinotasikan dengan $\vec{i}$, sehingga vektor $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Vektor satuan dengan arah sumbu Y, dinotasikan dengan $\vec{j}$, sehingga vektor $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Untuk setiap vektor $\vec{a}$ yang bukan vektor nol, dapat ditentukan suatu vektor satuan dari vektor $\vec{a}$, dilambangkan dengan $\hat{e}$. Vektor satuan arahnya searah dengan vektor $\vec{a}$ dan panjangnya sama dengan satu satuan.

Jika vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, maka vektor satuan dari vektor $\vec{a}$ dirumuskan dengan:

$$\hat{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} . \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Contoh 5:

Diketahui vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, tentukan vektor satuan yang searah vektor $\vec{a}$!

Alternatif penyelesaian:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Panjang vektor $\vec{a} = \sqrt{-3^2 + 4^2} = \sqrt{25}$ = 5

Misalkan vektor satuan yang serah vektor $\vec{a}$ adalah ê.

$$\hat{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{(-3)^2 + (4)^2}} . \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} . \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

C. Rangkuman

Anda telah mempelajari konsep Vektor. Beberapa hal penting yang telah Anda pelajari kita rangkum disini:

- Besaran vektor adalah besaran yang mempunyai besar dan arah.
- Vektor dapat dinyatakan sebagai segmen garis berarah, di mana panjang segmen menyatakan besar vektor dan arah anak panah menyatakan arah vektor.
- Vektor pada bidang koordinat Cartesius mempunyai dua komponen, yaitu komponen horisontal (sejajar sumbu X) dan komponen vertikal (sejajar sumbu Y). Jika diberikan komponen-komponen suatu vektor maka vektor tersebut dapat digambar dan dapat ditentukanbesarnya.
- Panjang vektor (Modulus vektor) adalah besar dari vektor yang merupakan panjang segmen garis berarah yang menyatakan vektor tersebut.
- Panjang (modulus) vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ dinyatakan $|\vec{u}|$=.$\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$
- Vektor posisi adalah vektor dengan pangkal di titik O(0,0).
- Dua vektor dikatakan sama jika kedua vektor tersebut mempunyai besar (modulus) dan arah yang sama.
- Vektor yang besarnya sama dengan u tetapi arahnya berlawanan dengan u dikatakan vektor negatif u dan dilambangkan –u.
- Vektor nol adalah vektor yang besarnya nol dan tidak mempunyai arah.
- Vektor satuan adalah vektor yang besarnya 1 satuan.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2
Operasi Vektor pada Bidang (R^2)

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 2 ini, diharapkan Anda dapat menentukan operasi vektor pada bidang, diantaranya hasil kali suatu vektor dengan skalar, hasil penjumlahan vektor-vektor, dan selisih dua vektor.

B. Uraian Materi

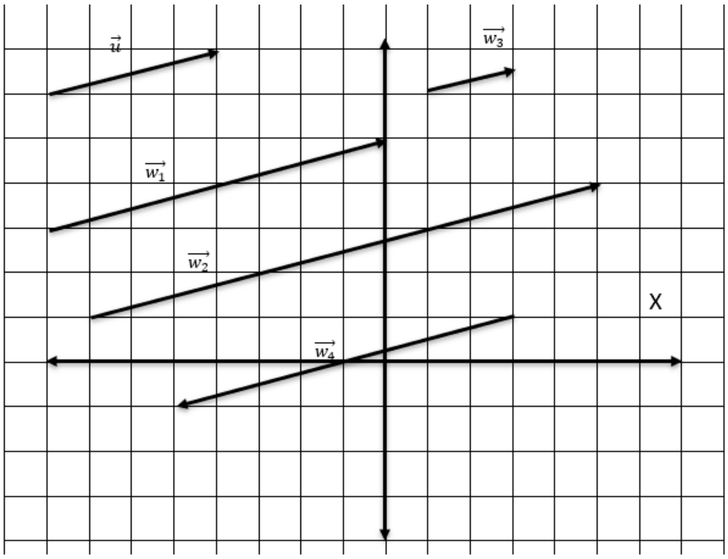
Menentukan Hasil Kali suatu Vektor dengan Skalar

Pada kegiatan pembelajaran 1 Anda telah mengenal besaran vektor, yaitu besaran yang memiliki besar (panjang) dan arah. Selain itu, ada besaran lain yang hanya memiliki besar, misalnya: jarak, waktu, massa, dan sebagainya. Besaran yang hanya memiliki besar disebut ***besaran skalar***. Adapun bilangan yang kita gunakan untuk mengukur besaran skalar disebut ***skalar.***

Vektor dapat dioperasikan dengan skalar. Karena skalar hanya mempunyai besar maka perkalian vektor dengan skalar hanya akan berpengaruh pada besar vektor saja, sedangkan arahnya tetap.

Hasil kali vektor $\vec{a}$ dengan skalar 2 akan menghasilkan vektor dengan besar 2 kalinya sedangkan arahnya tetap. Secara umum, hasil kali vektor $\vec{a}$ dengan skalar k akan menghasilkan vektor $k.\vec{a}$ yang besarnya k kali besar $\vec{a}$ dan arahnya sama dengan $\vec{a}$ bila k positif, dan berlawanan arah $\vec{a}$ bila k negatif.

Coba Anda perhatikan contoh berikut.



Gambar 2.1

Dari gambar terlihat bahwa vektor $\overrightarrow{w_1}$ searah dengan vektor $\vec{u}$ dan panjangnya 2 kali vektor $\vec{u}$. Vektor $\overrightarrow{w_1}$= 2$\vec{u}$. Begitupula dengan vektor $\overrightarrow{w_2}$ dan $\overrightarrow{w_3}$. Sementara untuk vektor $\overrightarrow{w_4}$ arahnya berlawanan dengan arah vektor $\vec{u}$ dan panjangnya 2 kali vektor $\vec{u}$ sehingga vektor $\overrightarrow{w_4}$= -2$\vec{u}$.

Dalam bentuk komponen vektor bisa Anda lihat lebih jelas.

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

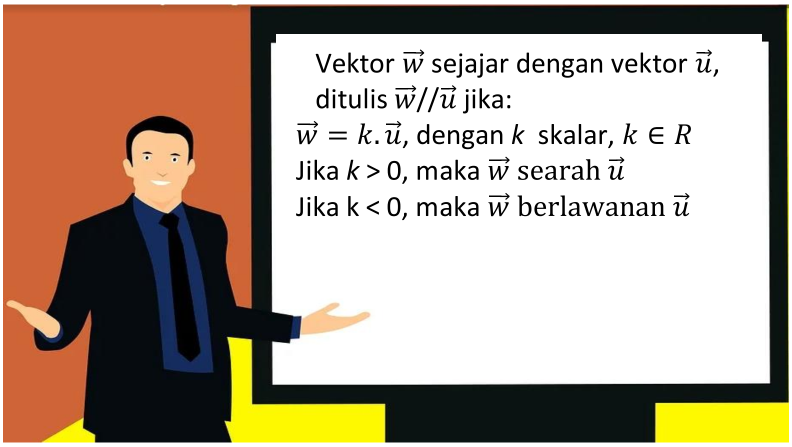
$\overrightarrow{w_1} = 2.\vec{u} = 2\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{w_2} = 3.\vec{u} = 3\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{w_3} = \frac{1}{2}\vec{u} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{w_4} = -2\vec{u} = -2\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \end{pmatrix}$

Uraian di atas memperlihatkan bahwa vektor-vektor yang arahnya sama dengan vektor $\vec{u}$ yaitu $\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}$ dan $\overrightarrow{w_3}$ dapat ditulis dalam bentuk $\overrightarrow{w_i} = k.\vec{u}$ dengan k skalar yang bernilai positif. Sementara itu vektor yang arahnya berlawanan dengan vektor $\vec{u}$ seperti $\overrightarrow{w_4}$, dapat ditulis dalam bentuk $\overrightarrow{w_i} = k.\vec{u}$ dengan k skalar yang bernilai negatif. Vektor-vektor yang arahnya sama atau berlawanan dengan vektor $\vec{u}$ disebut vektor-vektor yang sejajar dengan vektor $\vec{u}$. Sehingga:



Contoh 1:

Buktikan bahwa vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sejajar dengan vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

Alternatif Penyelesaian:

Dua buah vektor akan sejajar jika memiliki arah yang sama atau arah berlawanan dan besarnya bisa berbeda. Dua vektor yang sejajar dapat dinyatakan dalam bentuk perkalian skalar dengan vektor.

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.2 \\ 3.1 \end{pmatrix} = 3.\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\vec{u}$

Vektor $\vec{v}$ bisa dinyatakan dalam bentuk perkalian skalar dengan vektor $\vec{u}$, yaitu $\vec{v} = 3\vec{u}$ atau vektor $\vec{u}$ dapat dinyatakan dalam bentuk perkalian skalar dengan vektor $\vec{v}$, yaitu $\vec{u} = \frac{1}{3}\vec{v}$. Ini berarti vektor $\vec{u}$ searah dengan vektor $\vec{v}$ dan panjangnya $\frac{1}{3}\vec{v}$ atau vektor $\vec{v}$ searah dengan vektor $\vec{u}$ dan panjangnya 3 kali vektor $\vec{u}$. Jadi vektor $\vec{u}$ sejajar dengan vektor $\vec{v}$.

Contoh 2:

Tentukan apakah titik-titik $P(1, –2)$, $Q(2, 1)$, dan $R(4, 7)$ kolinear (segaris).

Alternatif Penyelesaian:

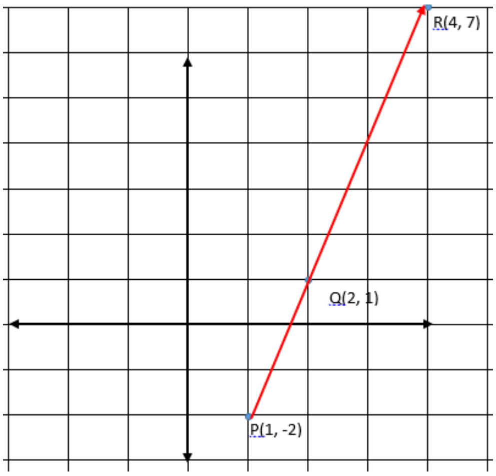
Titik P, Q dan R dikatakan kolinear (segaris) jika titik P, Q dan R terletak pada garis yang sama. Titik P, Q dan R akan terletak pada garis yang sama jika dan hanya jika vektor-vektor yang mewakili ruas garis berarah dari titik-titik P, Q dan R memiliki pangkal yang sama dan sejajar.

Vektor $\overrightarrow{PQ}$ dan $\overrightarrow{PR}$ memiliki titik pangkal yang sama.

Komponen vektor $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

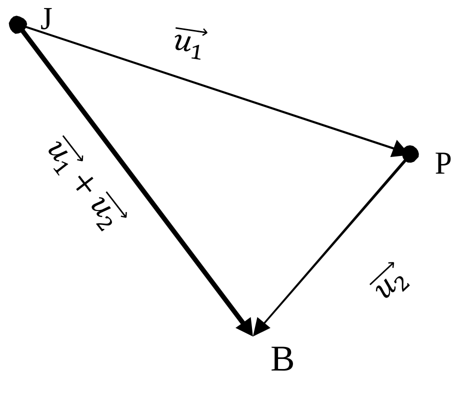
Komponen vektor $\overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} = 3.\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 3.\overrightarrow{PQ}$

Karena $\overrightarrow{PR} = 3.\overrightarrow{PQ}$ berarti vektor $\overrightarrow{PQ}$ sejajar vektor $\overrightarrow{PR}$ dan sama-sama berpangkal di titik P. Jadi, dapat disimpulkan bahwa titik P, Q dan R merupakan titik-titik yang kolinear (segaris) seperti tampak pada gambar di bawah.



Penjumlahan Vektor

Anita dan Alya merencanakan dari Jakarta ke Bandung. Jika naik kereta api mereka akan melalui Purwakarta dahulu, kemudian ke Bandung. Tetapi jika naik pesawat, dia dapat terbang langsung dari Jakarta ke Bandung. Anita dan Alya menggambarkan rute perjalanannya dalam bentuk vektor sebagai berikut, dengan J mewakili Jakarta, P mewakili Purwakarta dan B mewakili Bandung



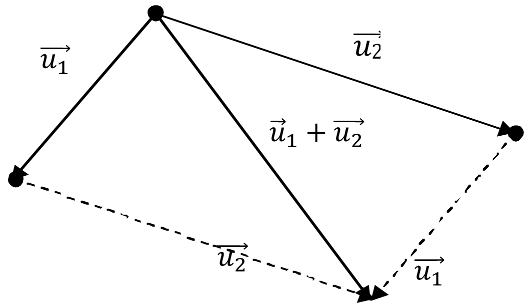
Gambar 2.2 Vektor Rute Jakarta -Bandung

Dari gambar di atas, rute Jakarta-Purwakarta diwakili oleh vektor $\overrightarrow{JP} = \overrightarrow{u_1}$ dan dilanjutkan dengan rute Purwakarta-Bandung yang diwakili oleh vektor $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{u_2}$. Dari gambar yang dibuat Anita dan Alya, rute perjalanan naik kereta dari Jakarta – Purwakarta – Bandung sama hasilnya dengan rute perjalanan naik pesawat Jakarta – Bandung.

$$\overrightarrow{JP} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{JB}$$

Masalah di atas merupakan masalah penjumlahan dua vektor atau resultan dari dua vektor. Untuk menggambar jumlah dua vektor, dapat dilakukan dengan cara seperti di atas, yaitu menghimpitkan ujung vektor pertama dengan pangkal vektor kedua, hasilnya adalah vektor dengan pangkal vektor pertama dan ujung vektor kedua. Cara ini disebut *aturan segitiga*.

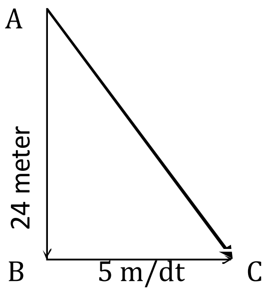
Selain itu dapat juga dilakukan dengan menghimpitkan pangkal kedua vektor $\overrightarrow{u_1}$ dan $\overrightarrow{u_2}$. Jumlah kedua vektor adalah diagonal jajargenjang yang sisi-sisinya adalah $\overrightarrow{u_1}$ dan $\overrightarrow{u_2}$. Cara ini disebut *aturan jajargenjang*. Perhatikan gambar berikut.



Gambar 2.3 Aturan Jajargenjang

Contoh 3 :

Sebuah perahu akan digunakan untuk menyeberangi sungai yang lebarnya 24 meter. Sungai itu mempunyai kecepatan arus 5 meter/detik. Arah perjalanan perahu tersebut dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 2.4

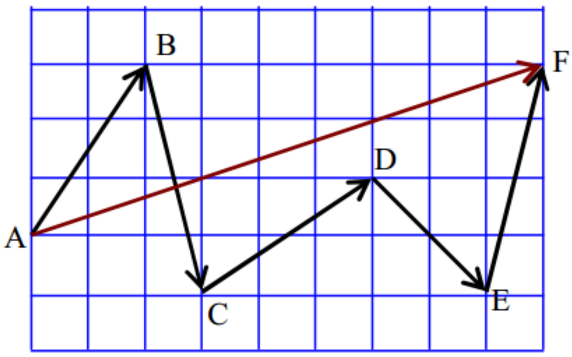
$\overrightarrow{AB}$ menyatakan arah dan jarak yang ingin ditempuh perahu,

$\overrightarrow{BC}$ menyatakan kecepatan arus

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ menyatakan arah dan jarak perjalanan perahu.

Contoh 4:

Perhatikan gambar berikut:



Gambar 2.5

Dari Gambar 2.5 diperoleh:

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}, \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}, \overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}, \overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ dan $\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix}9\\3\end{pmatrix}$

Kalau kita jumlahkan maka:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\3\end{pmatrix} = \overrightarrow{AF}$$

Jadi, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF}$

Kesimpulannya
Untuk setiap vektor
berlaku

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \cdots \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ}$$

Contoh 5:

Diketahui vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$ dan vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$, tentukan vektor $\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$

Alternatif penyelesaian:

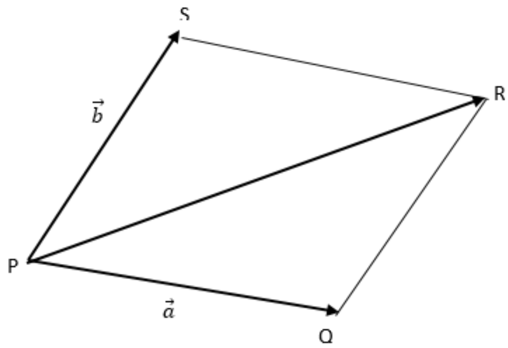
$$\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b} = 3\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\15\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-6\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\11\end{pmatrix}$$

Jadi: $\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b} = \begin{pmatrix}6\\11\end{pmatrix}$

Sifat-sifat Penjumlahan Vektor

1) Komutatif

   Perhatikan gambar berikut:



Gambar 2.6 Penjumlahan vektor secara komutatif.

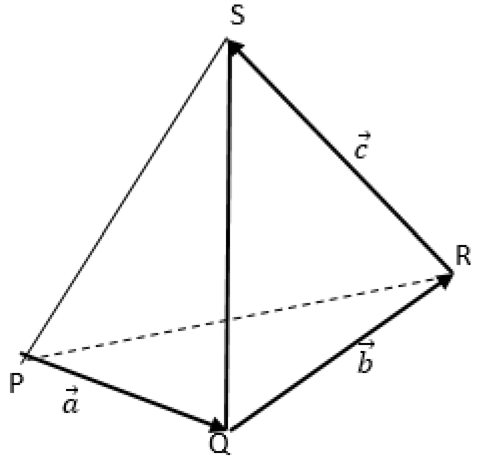
PQRS merupakan jajargenjang.

Misalkan: $\overrightarrow{PQ} = \vec{a} \rightarrow \overrightarrow{SR} = \vec{a}$

$\overrightarrow{PS} = \vec{b} \rightarrow \overrightarrow{QR} = \vec{b}$

$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \vec{a} + \vec{b}$
$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SR} = \vec{b} + \vec{a}$
$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (komutatif)
Jadi, penjumlahan pada vektor berlaku sifat komutatif.

2) Sifat Asosiatif
Perhatikan gambar berikut:



Gambar 2.7 Penjumlahan Vektor secara Asosiatif

$SPQR$ adalah suatu limas segitiga

$\overrightarrow{PQ} = \vec{a}, \overrightarrow{QR} = \vec{b}$, dan $\overrightarrow{RS} = \vec{c}$

$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}) + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{PS}$

$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{PQ} + (\overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RS}) = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QS} = \overrightarrow{PS}$

Jadi: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

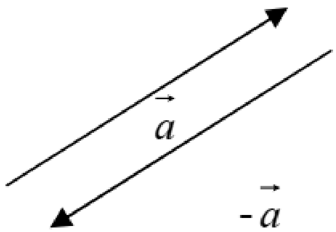
Berarti penjumlahan pada vektor bersifat Asosiatif.

3) Mempunyai elemen identitas, yaitu vektor $\vec{O}$ (*vektor nol*) sebab untuk semua vektor $\vec{a}$ berlaku $\vec{a} + \vec{o} = \vec{o} + \vec{a} = \vec{a}$

4) Invers dari suatu vektor

Lawan atau invers jumlah atau negatif dari suatu vektor $\vec{a}$ adalah suatu vektor yang apabila dijumlahkan dengan vektor $\vec{a}$ menghasilkan vektor nol. Lawan dari vektor $\vec{a}$ ditulis $-\vec{a}$. Apabila digambarkan dengan ruas garis berarah, sebuah vektor lawan dari vektor $\vec{a}$ adalah vektor yang panjangnya sama dengan vektor $\vec{a}$, tetapi arahnya berlawanan dengan vektor $\vec{a}$. Jadi, setiap vektor $\vec{a}$ mempunyai invers jumlah (lawan).

Sebab: $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{o}$



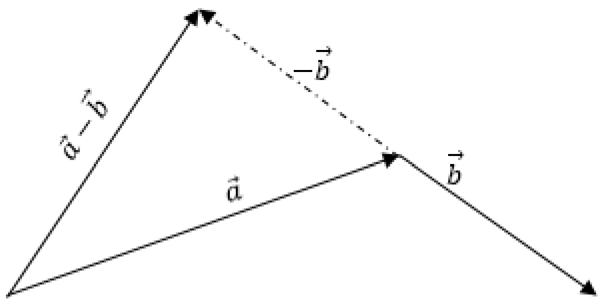
Gambar 2.8 Invers dari suatu Vektor

Selisih Dua Vektor

Selisih atau pengurangan adalah lawan dari penjumlahan. Anda bisa menghitung selisih dua vektor dengan cara menjumlahkan vektor pertama dengan lawan (negatif) vektor kedua. Dengan demikian :

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

Perhatikan gambar berikut:



Gambar 2.9 Selisih Dua Vektor

Contoh 6:

Diketahui koordinat titik $A(1, 1)$, $B(3, 5)$ dan $C(-1, 6)$. Tentukan vektor $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$!

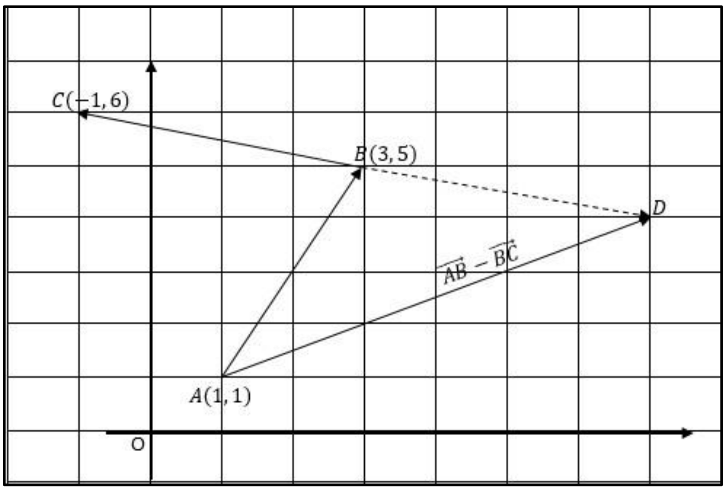
Alternatif penyelesaian:

Komponen vektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Komponen vektor $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1-3 \\ 6-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

vektor $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{BC}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \left(-\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2+4 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

Silahkan Anda perhatikan gambar berikut.



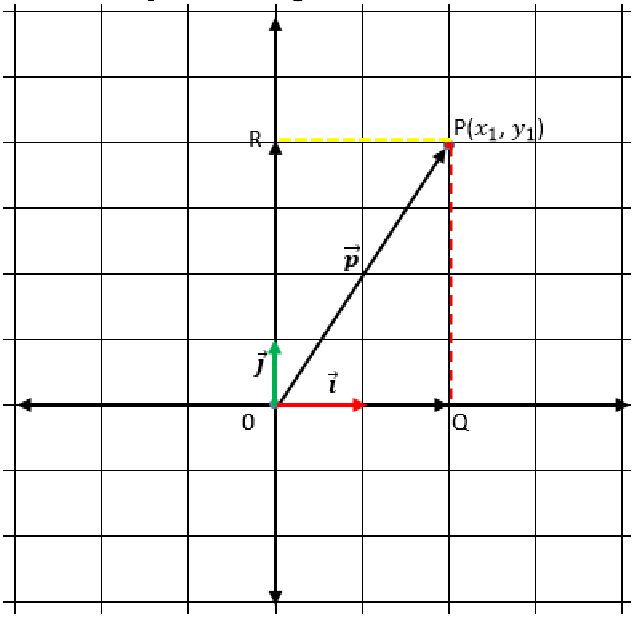
Gambar 2.10 Selisih Dua Vektor pada Kordinat Kartesius

Setelah Anda mempelajari konsep aturan rantai dalam menyelesaikan masalah Vektor, silahkan kembangkan pemahaman Anda dengan mengerjakan latihan dan evaluasi. Jika hasilnya belum memuaskan silahkan Anda ulang kembali pembelajarannya dari awal.

Vektor Basis di R^2

Setelah Anda mempelajari Perkalian skalar dengan vektor, penjumlahan dan selisih dua vektor, pembahasan kita kembangkan untuk memahami vektor basis.

Coba Anda perhatikan gambar berikut:



Gambar 2.11 Vektor Basis

Titik P(x_1, y_1) merupakan titik ujung vektor posisi yang pangkalnya pusat koordinat, yaitu vektor $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$. Dari gambar tampak bahwa: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RP}$ dengan

$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{RP} = x_1\vec{\imath}$ dan $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{QR} = y_1\vec{\jmath}$

Sehingga dapat dituliskan: $\overrightarrow{OP} = \vec{p} = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath}$

Bentuk vektor ini disebut vektor basis dalam $\vec{\imath}$ dan $\vec{\jmath}$

Jadi setiap vektor di R^2 dapat disajikan dalam bentuk vektor basis

$$\boxed{\vec{p} = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath}}$$

Contoh 7:

Diketahui segitiga OAB dengan titik sudut: O(0, 0), A(3, 1) dan B(6, 5).

$\vec{a}$ merupakan vektor posisi dari titik A dan $\vec{b}$ vektor posisi dari titik B.

Nyatakan vektor $\vec{a}, \vec{b}$ dan $\overrightarrow{AB}$ dalam bentuk vektor basis.

Alternatif penyelesaian:

$\vec{a} = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath} = 3\vec{\imath} + 1.\vec{\jmath}$

$\vec{b} = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath} = 6\vec{\imath} + 5\vec{\jmath}$

$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (6\vec{\imath} + 5\vec{\jmath}) - (3\vec{\imath} + 1.\vec{\jmath}) = 3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$

C. Rangkuman

- Hasil kali vektor $\vec{u}$ dengan skalar n akan menghasilkan vektor yang besarnya n kali besar $\vec{u}$ dan arah sama dengan $\vec{u}$.

- Untuk menggambar jumlah dua vektor, dapat dilakukan dengan cara
  - *aturan segitiga*, yaitu menghimpitkan ujung vektor pertama dengan pangkal vektor kedua, hasilnya adalah vektor dengan pangkal vektor pertama dan ujung vektor kedua.
  - *aturan jajargenjang*, yaitu dengan menghimpitkan pangkal kedua vektor $\overrightarrow{u_1}$ dan $\overrightarrow{u_2}$. Jumlah atau resultan kedua vektor adalah diagonal jajargenjang yang sisi-sisinya adalah $\overrightarrow{u_1}$ dan $\overrightarrow{u_2}$
- Selisih dua vektor berarti menjumlahkan vektor pertama dengan lawan (negatif) vektor kedua. Dengan demikian $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.
- Setiap vektor di R^2 dapat disajikan dalam bentuk vektor basis $\vec{p} = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath}$

D. Latihan Soal

Kerjakan dengan hati-hati dan teliti.

1. $ABCD$ adalah jajargenjang dengan $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$, titik E dan F masing-masing titik tengah $\overrightarrow{DC}$ dan $\overrightarrow{BC}$. Nyatakan vektor-vektor berikut dalam $\vec{u}$ dan $\vec{v}$
   a. $\overrightarrow{AE}$
   b. $\overrightarrow{EF}$
   c. $\overrightarrow{AF}$
2. Diketahui $A(1, 1)$, $B(4, 2)$, dan $C(10, 4)$ tunjukkan titik A, B, dan C segaris (*kolinear*) dan carilah $AB : BC$
3. Diketahui titik-titik A(-2, 5) dan B(2, -1). Jika $\vec{a}$ merupakan vektor posisi dari titik A dan $\vec{b}$ merupakan vektor posisi dari titik B, tentukan:
   a. $2\vec{a} - \vec{b}$
   b. $|\vec{a} + 2\vec{b}|$
4. Diketahui $\vec{a} = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath}$ dan $\vec{b} = 2\vec{\imath} + 13\vec{\jmath}$ dan $\vec{c} = -2\vec{\imath} - 8\vec{\jmath}$. Tentukanlah :
   a. $\vec{a} + \vec{b}$ dan $|\vec{a} + \vec{b}|$
   b. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ dan $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$
5. Diketahui titik O titik pangkal, dan titik-titik A, B dan C dengan vektor posisi $\overrightarrow{OA} = 9\vec{\imath} - 10\vec{\jmath}$, $\overrightarrow{OB} = 4\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ dan $\overrightarrow{OC} = m\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$.
   a. Tentukan vektor satuan yang searah $\overrightarrow{AB}$
   b. Tentukan nilai m agar A, B dan C segaris

KEGIATAN PEMBELAJARAN 3
Ruang Lingkup Vektor pada Bangun Ruang

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 3 ini diharapkan Anda dapat:

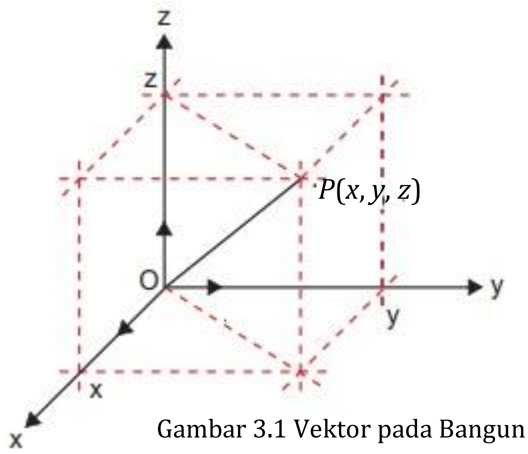
1. Menghitung modulus vektor bila diberikan suatu vektor pada bangun ruang.
2. Menentukan vektor posisi suatu vektor pada bangun ruang.
3. Menyatakan bahwa dua vektor pada bangun ruang sama.
4. Menentukan negatif dari suatu vektor pada bangun ruang.
5. Menyatakan pengertian vektor nol pada bangun ruang.
6. Menentukan vektor satuan pada bangun ruang.

B. Uraian Materi

Setelah pada pembelajaran 1 dan 2 Anda mempelajari vektor pada bidang (R^2), pada pembelajaran 3 kita kembangkankan pembahasan kita mengenai vektor pada bangun ruang (R^3).

Vektor pada bangun ruang (dimensi tiga) adalah vektor yang memiliki 3 buah sumbu yaitu X, Y dan Z yang saling tegak lurus dan perpotongan ketiga sumbu sebagai pangkal perhitungan vektor $\vec{p}$ pada bangun ruang dapat dituliskan dalam bentuk :

1. Koordinat Cartesius $P = (x, y, z)$



Gambar 3.1 Vektor pada Bangun Ruang

2. Vektor kolom $\vec{\mathrm{p}} = \begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \\ \mathrm{z} \end{pmatrix}$ atau vektor baris $\vec{\mathrm{p}} = (\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$
3. Kombinasi linear vektor satuan (vektor basis) $\vec{p} = x.\vec{\imath} + y.\vec{\jmath} + z.\vec{k}$

   dengan $\vec{\imath} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{\jmath} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dan $\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

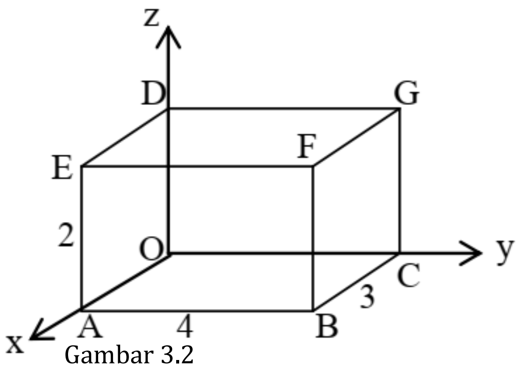
   $\vec{\imath}$ = vektor satuan dalam arah OX (searah sumbu X)
   $\vec{\jmath}$ = vektor satuan dalam arah OY (searah sumbu Y)
   $\vec{k}$ = vektor satuan dalam arah OZ (searah sumbu Z)

Contoh 1:

Pada gambar balok disamping, nyatakanlah vektor-vektor berikut ini dalam bentuk persamaan vektor dan vektor kolom.

a. $\overrightarrow{EG}$

b. $\overrightarrow{DB}$



Gambar 3.2

Alternatif penyelesaian:

a. $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DG}$

$|\overrightarrow{ED}| = |\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{FG}| = 3$

$\overrightarrow{ED} = -\overrightarrow{OA} = -3\vec{\imath}$, dengan $\vec{\imath}$ vektor satuan searah sumbu X

$\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{OC} = 4\vec{\jmath}$, dengan $\vec{\jmath}$ vektor satuan searah sumbu Y

$\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DG} = -3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$

Jadi persamaan vektor $\overrightarrow{EG} = -3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$

Vektor kolom:

$$\overrightarrow{EG} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b. $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FB}$

$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OA} = 3\vec{\imath}$

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OC} = 4\vec{\jmath}$

$\overrightarrow{FB} = -\overrightarrow{OD} = -2\vec{k}$, dengan $\vec{k}$ vektor satuan searah sumbu Z

$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FB} = 3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + (-2\vec{k}) = 3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - 2\vec{k}$

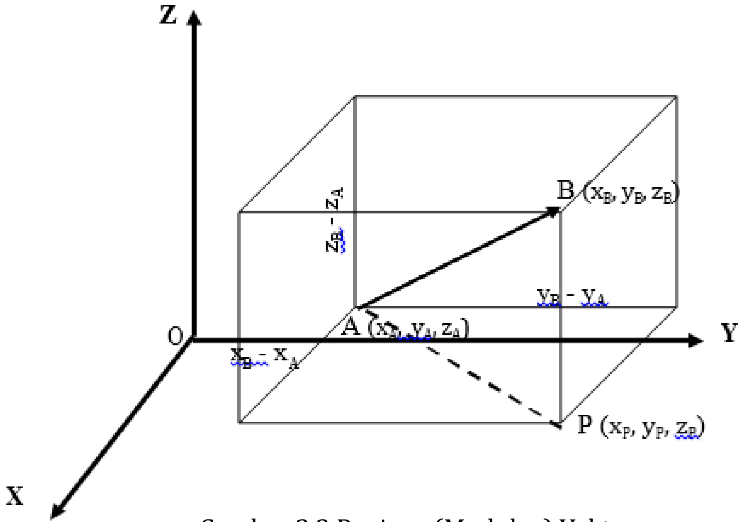
Jadi persamaan vektor $\overrightarrow{DB} = 3\vec{\imath} + 4\overrightarrow{\jmath - 2k}$

Vektor kolom:

$$\overrightarrow{DB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Panjang Vektor (Modulus Vektor)

Mari kita perhatikan gambar berikut:



Gambar 3.3 Panjang (Modulus) Vektor

Komponen vektor $\overrightarrow{AB}$ searah sumbu X sebesar $x_B - x_A$, komponen vektor $\overrightarrow{AB}$ yang searah sumbu Y sebesar $y_B - y_A$, dan komponen vektor $\overrightarrow{AB}$ yang searah sumbu Z sebesar $z_B - z_A$. Besar vektor $\overrightarrow{AB}$ adalah panjang $\overrightarrow{AB}$ dan disebut modulus vektor $\overrightarrow{AB}$. Perhatikan vektor $\overrightarrow{AB}$ merupakan diagonal ruang maka panjang $\overrightarrow{AB}$ adalah:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_{A)}{}^2 + (z_B - z_A)^2}$$

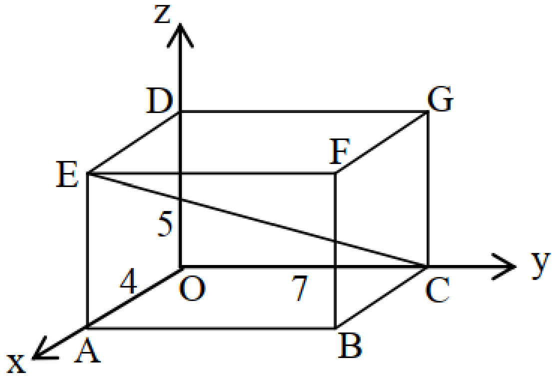
Contoh 2:

Diketahui balok *OABC.DEFG* dimana *O* adalah pusat koordinat Cartesius. Jika panjang sisi *OA* = 4 cm, *OC* = 7 cm dan *OD* = 5 cm. Tentukanlah :

a. Persamaan vektor $\overrightarrow{EC}$
b. Panjang vektor $\overrightarrow{EC}$

Alternatif Penyelesaian:

Perhatikan gambar berikut:



Gambar 3.4 Vektor pada bangun ruang balok.

a. Persamaan vektor $\overrightarrow{EC}$=vektor basis dari vektor $\overrightarrow{EC}$

$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GC}$

$|\overrightarrow{EA}| = |\overrightarrow{OD}| = 5$ cm, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{OC}| = 7$ cm, $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{OA}| = 4$ cm

$\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{GC} = 5(-\vec{k})$, dengan $\vec{k}$ vektor satuan searah sumbu Z.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DG} = 7\vec{j}$, dengan $\vec{j}$ vektor satuan searah sumbu Y

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{ED} = 4(-\vec{i})$, dengan $\vec{i}$ vektor searah sumbu X

$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -5\vec{k} + 7\vec{j} - 4\vec{i} = -4\vec{i} + 7\vec{j} - 5\vec{k}$

b. Panjang vektor $\overrightarrow{EC}$

$|\overrightarrow{EC}|^2 = |\overrightarrow{EG}|^2 + |\overrightarrow{GC}|^2 = |\overrightarrow{ED}|^2 + |\overrightarrow{DG}|^2 + |\overrightarrow{GC}|^2$

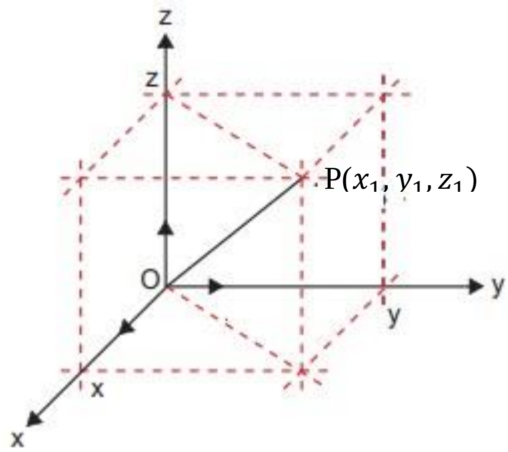
$=(-4)^2 + 7^2 + (-5)^2 = 16 + 49 + 25 = 90$

$|\overrightarrow{EC}| = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$

Vektor Posisi

Vektor pada bangun ruang dapat digambarkan pada ruang koordinat Cartesius. Setiap titik *P* pada ruang dapat dinyatakan sebagai vektor $\overrightarrow{OP}$, yaitu vektor yang berpangkal di titik O(0,0,0) dan berujung di titik P. Vektor $\overrightarrow{OP}$ disebut vektor posisi dari titik *P* pada ruang koordinat Cartesius. Koordinat titik P merupakan komponen-komponen dari vektor posisi $\overrightarrow{OP}$ tersebut.

Perhatikan gambar berikut:



Gambar 3.5

Pada gambar di atas vektor posisi $\overrightarrow{OP}$ mempunyai komponen searah sumbu X sebesar x_1, komponen searah sumbu Y sebesar y_1 dan komponen searah sumbu Z sebesar z_1.

Vektor posisi $\overrightarrow{OP} = \vec{p} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ dan dalam bentuk vektor basis adalah

$\overrightarrow{OP} = \vec{p} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$.

Contoh 3:

Diketahui segitiga ABC dengan titik-titik sudut $A(0, 3, 5)$, $B(2, 4, 6)$, dan $C(4, 3, 1)$.

Tentukan:

a. Vektor posisi titik A, B dan C.
b. Vektor $\vec{p}$ yang mewakili ruas garis berarah dari titik pangkal A ke titik B
c. Vektor $\vec{q}$ yang mewakili ruas garis berarah dari titik pangkal B ke titik C
d. Vektor $\vec{r}$ yang mewakili ruas garis berarah dari titik pangkal A ke titik C
e. Keliling segitiga ABC

Alternatif Penyelesaian:

a. Vektor $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ mewakili ruas garis berarah dari titik pangkal O ke titik A.
   Vektor $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ mewakili ruas garis berarah dari titik pangkal O ke titik B.
   Vektor $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ mewakili ruas garis berarah dari titik pangkal O ke titik C.
   $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ dan $\overrightarrow{OC} = \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

b. $\vec{p} = \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c. $\vec{q} = \overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$

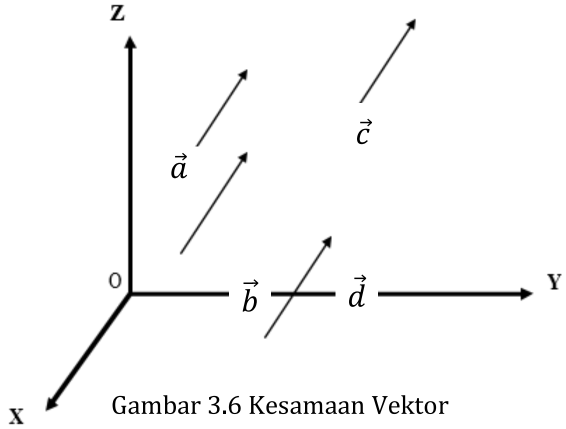
d. $\vec{r} = \overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

e. Keliling segitiga $ABC = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{AC}|$
   $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$

$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-5)^2} = \sqrt{30}$
$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{4^2 + 0^2 + (-4)^2} = \sqrt{32}$
Jadi, keliling segitiga ABC = $\left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{BC}\right| + \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{6} + \sqrt{30} + \sqrt{32}$.

Kesamaan Vektor

Dua vektor dalam ruang dikatakan sama jika mempunyai besar dan arah yang sama. Perhatikan gambar berikut:



Gambar 3.6 Kesamaan Vektor

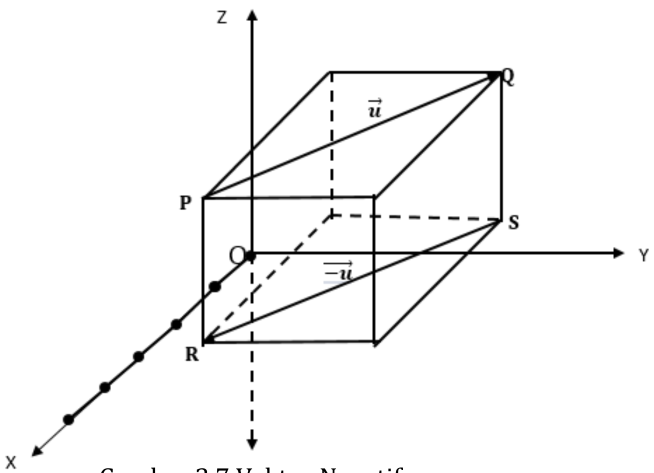
Vektor $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, dan $\vec{d}$ pada gambar di atas tampak sejajar dan memiliki panjang yang sama. Vektor $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, dan $\vec{d}$ adalah vektor yang sama karena mempunyai besar dan arah yang sama.
Misal:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ atau $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ atau $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$

$\vec{a} = \vec{b}$ jika dan hanya jika $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $a_3 = b_3$.

Vektor Negatif

Vektor di ruang yang besarnya sama dengan vektor $\vec{u}$ tetapi arahnya berlawanan disebut vektor negatif dari $\vec{u}$ dan ditulis sebagai $-\vec{u}$.Perhatikan gambar berikut.



Gambar 3.7 Vektor Negatif

Vektor $\overrightarrow{PQ}$ dengan vektor $\overrightarrow{SR}$ memiliki panjang yang sama dan arah saling berlawanan. Vektor $\overrightarrow{SR}$ merupakan lawan (negatif) dari vektor $\overrightarrow{PQ}$.

Contoh 4:

Diketahui vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, tentukan negatif dari vektor $\vec{u}$.

Alternatif jawaban:

Negatif dari vektor $\vec{u}$ adalah $-\vec{u}$, maka $-\vec{u} = -\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$

Vektor Nol

Yang dimaksud dengan vektor nol adalah vektor yang besarnya nol atau tidak mempunyai panjang (berupa titik). Vektor nol tidak mempunyai arah tertentu. Vektor nol dilambangkan dengan $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Pada koordinat ruang Cartesius, vektor nol adalah titik $O(0,0,0)$.

Vektor Satuan

Vektor yang mempunyai panjang 1(satu) satuan disebut vektor satuan. Vektor satuan dari vektor $\vec{a}$ didefinisikan vektor $\vec{a}$ dibagi dengan besar vektor $\vec{a}$ sendiri, yang dirumuskan dengan $\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

Contoh 5:

Tentukan vektor satuan dari vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$.

Alternatif Penyelesaian :

Panjang vektor $\vec{a}$ adalah $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{25} = 5$

Jadi, vektor satuan vektor $\vec{a}$ adalah $\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$ dan

Panjang vektor $\vec{e}$ adalah $|\vec{e}| = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{25} + \frac{16}{25} + \frac{5}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = 1$

C. Rangkuman

- Modulus (panjang) vektor pada bangun ruang adalah besar dari vektor yang merupakan panjang segmen garis berarah yang menyatakan vektor tersebut.
- Modulus vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ dinyatakan dengan $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
- Vektor posisi adalah vektor yang menyatakan kedudukan setiap titik di ruang koordinat Cartesius. Vektor posisi berpangkal di titik O(0,0,0) dan berujung di titik pada ruang koordinat.

- Dua vektor dikatakan sama jika mempunyai besar dan arah yang sama. Vektor yang besarnya sama dengan $\vec{u}$ tetapi arahnya berlawanan dengan $\vec{u}$ dikatakan vektor negative $\vec{u}$.
- Vektor nol adalah vektor yang besarnya nol dan tidak mempunyai arah.
- Vektor satuan adalah vektor yang besarnya 1. Vektor satuan yang searah dengan suatu vektor $\vec{v}$ ditentukan dengan rumus: $\vec{e} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

D. Latihan Soal

1. Tentukan modulus dari vektor-vektor berikut.
   a. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$
   b. $\overrightarrow{AB}$ dengan titik A $(-2 , 3 , -1)$ dan titik B $(2 , 1 , -4)$
2. Diketahui titik P $(2 , 5 , -4)$ dan Q $(1 , 0 , -3)$. Tentukan :
   a. Koordinat titik B jika $\overrightarrow{AB}$ sama dengan vektor $\overrightarrow{PQ}$ dan titik $A(2 , -2 , 4)$
   b. Koordinat titik S jika $\overrightarrow{RS}$ merupakan negatif vektor $\overrightarrow{PQ}$ jika titik $R(-1 , 3 , 2)$
3. Tentukan vektor satuan dari vektor-vektor berikut.
   a. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
   b. $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
   c. $\overrightarrow{CD}$ dengan $C(3 , -2 , 1)$ dan $D(2 , -2 , 1)$
   d. $\overrightarrow{FG}$ dengan $F(2 , 1 , 2)$ dan $G(2 , 0 , 3)$
4. Tentukan besar vektor berikut beserta vektor satuannya.
   a. $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$
   b. $\vec{w} = -\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} + \vec{k}$
   c. $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$
5. Gambarlah vektor dengan titik P (2 , -3 , 1) dan Q (1 , 3 , -2)
   a. Hitung modulus vektor $\overrightarrow{PQ}$
   b. Buat vektor negatif dari $\overrightarrow{PQ}$, kemudian hitung modulusnya/besarnya !

KEGIATAN PEMBELAJARAN 4
Operasi Vektor Pada Bangun Ruang

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 4 ini diharapkan Anda dapat:
1. Menentukan hasil kali suatu vektor pada bangun ruang dengan skalar.
2. Menentukan hasil penjumlahan vektor-vektor pada bangun ruang.
3. Menentukan selisih dua vektor pada bangun ruang.
4. Menentukan perbandingan vektor.
5. Menentukan perkalian skalar dua vektor pada bangun ruang bila diketahui komponen-komponennya.
6. Menentukak proyeksi ortogonal suatu vektor pada vektor Lain.

B. Uraian Materi

Hasil Kali Vektor dengan Skalar pada Bangun Ruang

Seperti telah Anda pelajari pada kegiatan pembelajaran 2, hasil kali vektor dengan skalar sekarang kita kembangkan pada bangun ruang. Anda akan menggunakan pemahaman Anda tentang vektor dan skalar di kegiatan belajar ini. Vektor dapat dioperasikan dengan skalar. Karena skalar merupakan bilangan, maka perkalian vektor dengan skalar hanya akan berpengaruh pada besar vektor saja sedangkan arah vektor tetap.

Hasil kali vektor $\vec{u}$ dengan skalar 2 akan menghasilkan vektor dengan besar 2 kalinya sedangkan arahnya tetap. Secara umum, hasil kali vektor $\vec{u}$ dengan skalar n akan menghasilkan vektor yang besarnya n kali besar $\vec{u}$ dan arahnya sama dengan $\vec{u}$ bila n positif dan berlawanan arah $\vec{u}$ bila n negatif.

Jadi, hasil kali vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ dengan skalar n adalah $n.\vec{u} = n.\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n.u_1 \\ n.u_2 \\ n.u_3 \end{pmatrix}$

Contoh 1:

Jika $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, maka $4.\vec{a} = 4.\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.2 \\ 4.3 \\ 4.(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ -4 \end{pmatrix}$

Jika $\vec{v} = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} - 7\vec{k}$, maka $3.\vec{v} = 3(3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} - 7\vec{k}) = 9\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} - 21\vec{k}$

Penjumlahan Vektor pada Bangun Ruang

Pada dasarnya penjumlahan vektor pada bangun ruang sama dengan penjumlahan vektor pada bidang datar, menggunakan aturan segitiga atau aturan jajargenjang. Hanya saja komponen vektor yang ditambahkan menjadi lebih banyak satu komponen.

Secara umum jika dua vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ dan vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ adalah vektor-vektor tidak nol, maka :

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

Jika vektor $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ dan vektor $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$, maka :

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1+b_1)\vec{i} + (a_2+b_2)\vec{j} + (a_3+b_3)\vec{k}$$

Contoh 2:

Hitunglah jumlah dari dua buah vektor berikut.

a. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

b. $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$ dan $\vec{b} = 3\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$

Alternatif Penyelesaian :

a. $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 2+(-1) \\ -3+4 \\ 5+(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

b. $\vec{a} + \vec{b} = (2+3)\vec{i} + (1+5)\vec{j} + (-4+1)\vec{k}$

$= 5\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k}$

Contoh 3:

Seorang pendaki gunung memulai pendakian gunung dari kaki gunung yang dapat dinyatakan sebagai posisi/koordinat $O(0,0,0)$. Dari titik O pendaki gunung tersebut menuju lokasi P yang berkedudukan 5 km ke arah timur, 4 km ke arah utara dan 3 km ke atas. Dari lokasi P dia melanjutkan perjalanan ke lokasi Q yang berkedudukan 4 km ke arah timur, 1 km ke arah selatan dan 3 km ke atas. Di manakah kedudukan pendaki gunung tersebut apabila di lihat dari posisi mula-mula (lokasi $O(0,0,0)$)?

Alternatif penyelesaian:

Dari lokasi mula-mula ke lokasi P dapat dinyatakan sebagai vektor $\overrightarrow{OP}$.

Lokasi titik P adalah 5 km ke arah timur, 4 km ke arah utara dan 3 km ke atas dan dinyatakan dalam bentuk vektor kolom: $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Dari lokasi P ke lokasi Q dapat dinyatakan sebagai vektor $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Kedudukan pendaki gunung dilihat dari lokasi mula-mula adalah :

$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ}$$

$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Ini berarti bahwa pendaki gunung tersebut terletak 9 km ke arah timur, 3 km ke arah utara, dan pada ketinggian 6 km dari kedudukan mula-mula.

Selisih Dua Vektor pada Bangun Ruang

Selisih atau pengurangan adalah lawan dari penjumlahan. Selisih dua vektor berarti menjumlahkan vektor pertama dengan lawan (negatif) vektor kedua. Dengan demikian: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Selisih dua vektor pada koordinat ruang Cartesius pada dasarnya sama dengan selisih vektor dua vektor pada koordinat bidang Cartesius, hanya saja komponen vektornya ada tiga.

Secara umum selisih dua vektor jika dua vektor $\vec{a}= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ dan vektor $\vec{b}= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

maka : $\vec{a} - \vec{b}= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$

Jika vektor $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ dan vektor $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$,
maka : $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1)\vec{i} + (a_2 - b_2)\vec{j} + (a_3 - b_3)\vec{k}$

Contoh 4:
Hitunglah selisih dari dua vektor berikut :

a . $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

b. $\vec{a} = 8\vec{i} + 6\vec{j} + 9\vec{k}$ dan $\vec{b} = 3\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k}$

Alternatif Penyelesaian :

a. $\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 8-3 \\ 6-1 \\ 7-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

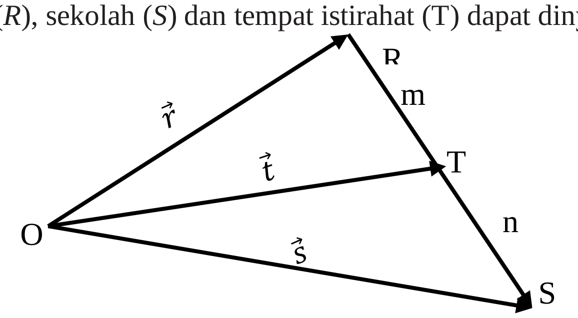
b. $\vec{a} - \vec{b} = (8\text{-}3)\vec{i} + (6\text{-}5)\vec{j} + (9\text{-}2)\vec{k} = 5\vec{i} + \vec{j} + 7\vec{k}$

Perbandingan Vektor

Alif pergi dari rumahnya menuju sekolah dengan berjalan kaki melalui jalan lurus. Setelah berjalan *m* meter Alif beristirahat sejenak dan untuk sampai ke sekolah dia harus melanjutkan *n* meter lagi. Perbandingan jarak yang telah ditempuh oleh Alif dengan jarak yang belum ditempuhnya adalah *m* : *n.*

Anda perhatikan gambar berikut.

Misalkan posisi rumah Alif adalah *R*, posisi sekolah adalah *S*, Posisi Alif istirahat *T***.** Posisi rumah (*R*), sekolah (*S*) dan tempat istirahat (T) dapat dinyatakan sebagai vektor posisi.



Gambar 4.1 perbandingan vektor

Dari gambar diketahui $\overrightarrow{RT} : \overrightarrow{TS} = m : n$

$$\frac{\overrightarrow{RT}}{\overrightarrow{TS}} = \frac{m}{n} \leftrightarrow n.\overrightarrow{RT} = m.\overrightarrow{TS}$$
$$n(\vec{t} - \vec{r}) = m(\vec{s} - \vec{t})$$
$$n.\vec{t} - n.\vec{r} = m.\vec{s} - m.\vec{t}$$
$$n.\vec{t} + m.\vec{t} = m.\vec{s} + n.\vec{r}$$
$$\vec{t}(n + m) = m.\vec{s} + n.\vec{r}$$
$$\vec{t} = \frac{m.\vec{s} + n.\vec{r}}{n + m} = \frac{m.\vec{s} + n.\vec{r}}{m + n}$$

Jadi, $$\boxed{\vec{t} = \frac{m.\vec{s} + n.\vec{r}}{m + n}}$$

Jika $R(x_1, y_1)$ dan $S(x_2, y_2)$ di R^2, maka: $\vec{t} = \frac{m.\vec{s}+n.\vec{r}}{m+n} = \frac{m\binom{x_2}{y_2}+n.\binom{x_1}{y_1}}{m+n}$

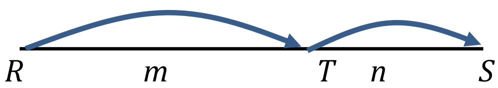
Koordinat titik T adalah $T(\frac{m.x_2+nx_1}{m+n}, \frac{m.y_2+ny_1}{m+n})$

Jika $R(x_1, y_1, z_1)$ dan $S(x_2, y_2, z_2)$ di R^3, maka: $\vec{t} = \frac{m.\vec{s}+n.\vec{r}}{m+n} = \frac{m\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}+n.\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}}{m+n}$

Koordinat titik T adalah $T(\frac{m.x_2+nx_1}{m+n}, \frac{m.y_2+ny_1}{m+n}, \frac{mz_2+nz_1}{m+n})$

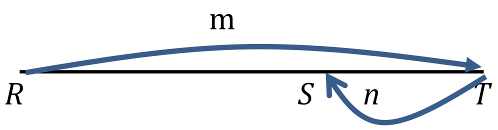
Dalam perbandingan $\overrightarrow{RT} : \overrightarrow{TS} = m : n$, terdapat dua kasus, yaitu:

1. Titik T membagi RS di dalam.



$RT : TS = m : n$

2. Titik T membagi RS di luar.



$RT : TS = m : (-n)$

Contoh 5:

Diketaui rua garis $\overline{AB}$ dengan $A(2, 3, 4)$ dan $B(6, 7, 8)$. Titik T terletak pada $\overline{AB}$ dengan perbandingan 1 : 3. Tentukan koordian titik T jika:

a. T membagi $\overline{AB}$ di dalam
b. T membagi $\overline{AB}$ di luar.

Alternatif Penyelesaian:

a. Titik T membagi $\overline{AB}$ di dalam dengan perbandingan 1 : 3, berlaku $\overline{AT} : \overline{TB} = 1 : 3$.

Koordinat titik T dapat Anda tentukan dengan cara berikut.

$$T(\frac{m.x_2+nx_1}{m+n}, \frac{m.y_2+ny_1}{m+n}, \frac{mz_2+nz_1}{m+n}) \rightarrow T(\frac{1.6+3.2}{1+3}, \frac{1.7+3.3}{1+3}, \frac{1.8+3.4}{1+3}) = \left(\frac{12}{4}, \frac{16}{4}, \frac{20}{4}\right) = (3, 4, 5)$$

Jadi, koordinat titik T jika membagi dari dalam adalah $T(3, 4, 5)$

b. Titik T membagi $\overline{AB}$ di dalam dengan perbandingan 1 : 3, berlaku $\overline{AT}$: $\overline{TB}$ = 1 : (– 3)

Koordinat titik T dapat Anda tentukan dengan cara berikut.

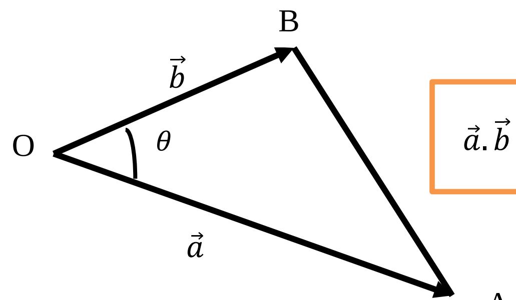
$T(\frac{m.x_2+nx_1}{m+n}, \frac{m.y_2+ny_1}{m+n}, \frac{mz_2+nz_1}{m+n})$

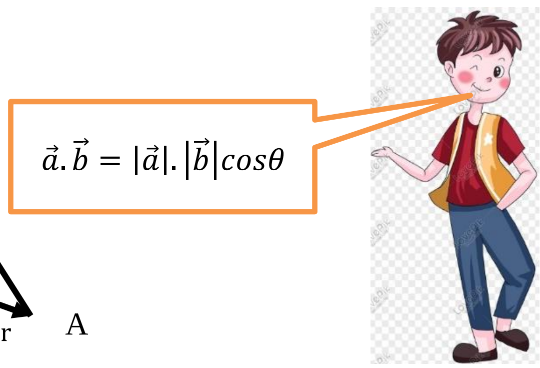
$\rightarrow T(\frac{1.6+(-3).2}{1+(-3)}, \frac{1.7+(-3).3}{1+(-3)}, \frac{1.8+(-3).4}{1+(-3)}) = \left(\frac{0}{-2}, \frac{-2}{-2}, \frac{-4}{-2}\right) = (0, 1, 2)$

Jadi, koordinat titik T jika membagi dari dalam adalah $T(0, 1, 2)$.

Perkalian Skalar Dua Vektor

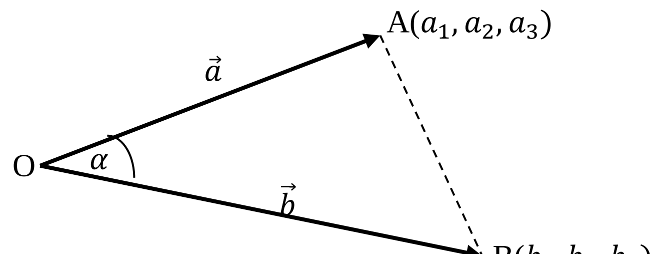
Dua vektor bukan nol pada bangun ruang dapat dikalikan dan hasilnya merupakan scalar atau Perkalian vektor dengan vektor yang menghasilkan skalar.. Hal ini sering disebut sebagai *dot product* (hasil kali titik) dari dua vektor dan dinyatakan $\vec{a}.\vec{b}$ didefinisikan sebagai $|\vec{a}|.|\vec{b}|.cos\theta$ dengan θ sudut antara vektor $\vec{a}$ dan vektor $\vec{b}$ seperti gambar berikut:





Gambar 4.2 Sudut antara dua vektor

Coba Anda perhatikan vektor berikut.



Gambar 4.3 Sudut antara dua vektor

Dengan menggunakan aturan cosinus yang sudah Anda pelajari pada Matematika Umum, kita dapatkan:

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 - 2.|\overrightarrow{OA}||OB|\cos\alpha$$

$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2.|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha \qquad (1)$$

Berdasarkan rumus panjang vektor:

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\vec{b} - \vec{a}|^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2$$

$$= (b_1^2 - 2b_1a_1 + a_1^2) + (b_2^2 - 2b_2a_2 + a_2^2) + (b_3^2 - 2b_3a_3 + a_3^2)$$

$$= (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + ((a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) - 2b_1a_1 - 2b_2a_2 - 2b_3a_3$$

$$= |\vec{b}|^2 + |\vec{a}|^2 - 2(b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3) \qquad (2)$$

Dari persamaan (1) dan (2) kita dapatkan:

$$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2.|\vec{a}||\vec{b}|cos\alpha = |\vec{b}|^2 + |\vec{a}|^2 - 2(b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3)$$

$$-2.|\vec{a}||\vec{b}|cos\alpha = -2(b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3)$$

$$|\vec{a}||\vec{b}|cos\alpha = b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3$$

$$\vec{a}.\vec{b} = b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3$$

$$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Kedua ruas dikurang $|\vec{a}|^2$dan $|\vec{b}|^2$
Kedua ruas dibagi (-2)

Jadi,

$$\boxed{\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}$$

Contoh 6:

Diketahui $|\vec{a}|$ = 6 dan $|\vec{b}|$ = 5 dan sudut antara vektor $\vec{a}$ dan vektor $\vec{b}$ adalah 60° tentukan nilai $\vec{a}.\vec{b}$!

Alternatif Penyelesaian:

$\vec{a}.\vec{b}$ = $|\vec{a}|.|\vec{b}|$. cos α
= 6 . 5 . cos 60°
= 30 .$\frac{1}{2}$
= 15

Contoh 7:

Diketahui vektor $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}$ dan $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$, tentukan Perkalian skalar vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$.

Alternatif penyelesaian:

$\vec{a} . \vec{b}$ = $a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3$
= 2.1 + 3.2 + 6.2
= 2 + 6 + 12
= 20

Contoh 8:

Diketahui $|\vec{a}|$ = 8 dan $|\vec{b}|$ = 4 dan sudut antara vektor $\vec{a}$ dan vektor $\vec{b}$ adalah 90° tentukan nilai $\vec{a}.\vec{b}$!

Alternatif Penyelesaian:

$\vec{a}.\vec{b}$ = $|\vec{a}|.|\vec{b}|$. cos α
= 8 . 4 . cos 90°
= 32 .0
= 0

Pada contoh soal 8 sudut antara vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ adalah 90^0, berarti vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ saling tega lurus. Dengan demikian, dapat disimpulkan sebagai berikut.

Dua buah vektor tegak lurus apabila hasil *dot product* kedua vektor bernilai nol.

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos 90^0 = |\vec{a}|.|\vec{b}|. 0 = 0$$

Jadi, jika vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ dan vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ saling tegak lurus, maka:

$$\vec{a} . \vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3 = 0$$

Rumus ini berlaku juga untuk vektor pada bidang R^2

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|cos\theta$$

$$\vec{a} . \vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2$$

1. Jika sudut antara vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ diketahui sama dengan θ dan $0^0 \leq \theta \leq 180^0$, maka: $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|cos\theta$
2. Jika sudut antara vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ tidak diketahui, maka $\vec{a}\ .\ \vec{b}\ =\ a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3$
3. Sifat-sifat perkalian vektor $\vec{a}, \vec{b}$ dan $\vec{c}$ berlaku:
   - $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$
   - $\vec{a}.(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$
   - $\vec{a}.\vec{a} = |\vec{a}|^2$
   - Jika $\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0$, dan $\vec{a}.\vec{b} = 0$, maka $\vec{a} \perp \vec{b}$

Anda sudah paham Perkalian scalar dua vektor? Sekarang pemahaman akan kita perluas dengan mempelajari sudut antara dua vektor. Jika dua vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ bertemu pada satu titik, maka sudut antara dua vektor tersebut adalah sudut yang dibentuk oleh kaki vektor $\vec{a}$ dan kaki vektor $\vec{b}$. Sudut yang diambil adalah sudut terkecil.

Coba Anda perhatika rumus Perkalian scalar dua vektor berikut:

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|cos\alpha$$

$$\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Dari rumus di atas Anda dapat mencari sudut antara vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$.

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha \rightarrow \cos\alpha = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Contoh 9:

Diketahui $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Tentukan sudut antara $\vec{a}$ dan $\vec{b}$!

Alernatif penyelesaian:

Misalkan sudut antara $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ adalah α.

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{1.(-1) + (-1).2 + 0.2}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + 0^2}.\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{-3}{\sqrt{2}.\sqrt{9}} = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Diperoleh $\alpha = 135^0$

Jadi, sudut antara $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ adalah 135^0.

Contoh 10:

Diketahui vektor $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ dan $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, tentukan sudut antar vektor $\vec{u}$ dan $\vec{v}$.

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan sudut antara $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ adalah α.

$$\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|} = \frac{2.1 + (-1).1 + 1.2}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}.\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 60^0$$

Jadi, sudut antara vektor $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ dan $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ adalah $\alpha = 60^0$

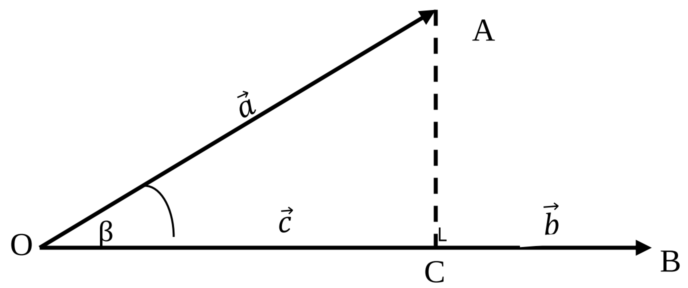
Proyeksi Ortogonal Suatu Vektor pada Vektor Lain

Selain menentukan besar sudut antara dua vektor, salah satu kegunaan dari Perkalian skalar dua vektor adalah untuk menentukan proyeksi ortogonal dari suatu vektor pada vektor lain.

a. **Proyeksi Skalar Ortogonal**

Proyeksi skalar ortogonal biasanya disingkat dengan proyeksi skalar saja atau sering dikatakan dengan panjang proyeksi vektor. Misalkan proyeksi $\overrightarrow{OA}$ pada $\overrightarrow{OB}$ adalah $\overrightarrow{OC}$.

Perhatikan gambar berikut.



Gambar 4.4 Proyeksi scalar ortogonal

$|\overrightarrow{OC}| = |\vec{c}|$ disebut proyeksi skalar orthogonal (panjang proyeksi) $\vec{a}$ pada $\vec{b}$.

Perhatikan segitiga AOB.

$$\text{Cos } \beta = \frac{|\overrightarrow{OC}|}{|\overrightarrow{OA}|}$$

$$\rightarrow |\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OA}| \cos \beta$$

$$= |\vec{a}| \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$$= \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

Jadi, proyeksi skalar orthogonal (panjang proyeksi) vektor $\vec{a}$ pada $\vec{b}$ adalah:

$$|\overrightarrow{OC}| = |\vec{c}| = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

b. **Proyeksi Vektor ortogonal**

Coba Anda perhatikan kembali Gambar 4.4 di atas. Vektor $\vec{c}$ searah vektor $\vec{b}$, ini berarti vektor satuan $\vec{c}$ sama dengan vektor satuan $\vec{b}$, yaitu $\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ sehingga:

$$\vec{c} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|} . \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^2} . \vec{b}$$

Jadi, proyeksi vektor $\vec{a}$ pada $\vec{b}$ adalah: $\vec{c} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^2} . \vec{b}$

Contoh 11:

Diketahui vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Tentukanlah:

a. Panjang proyeksi vektor $\vec{a}$ pada vektor $\vec{b}$

b. Vektor proyeksi vektor $\vec{a}$ pada vektor $\vec{b}$

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan vektor proyeksi vektor $\vec{a}$ pada vektor $\vec{b}$ adalah vektor $\vec{c}$

a. $|\vec{c}| = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{1.(-1)+(-1).2+0.2}{\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2}} = \left|\frac{-3}{\sqrt{9}}\right| = \left|\frac{-3}{3}\right| = |-1| = 1$

b. $\vec{c} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^2} . \vec{b} = \frac{1.(-1)+(-1).2+0.2}{(\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2})^2} . \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{-3}{9} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Jadi, vektor proyeksi vektor $\vec{a}$ pada vektor $\vec{b}$ adalah $\vec{c} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

C. Rangkuman

- Hasil kali vektor $\vec{u}$ dengan skalar n akan menghasilkan vektor yang besarnya n kali besar $\vec{u}$ dan arah sama dengan $\vec{u}$.
- Penjumlahan dua vektor pada bangun ruang prinsipnya sama dengan penjumlahan dua vektor pada bidang datar.
- Selisih dua vektor berarti menjumlahkan vektor pertama dengan lawan (negatif) vektor kedua. Dengan demikian $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.
- Pada koordinat ruang Cartesius jika $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, maka:
  - $n.\vec{a} = n.\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n.a_1 \\ n.a_2 \\ n.a_3 \end{pmatrix}$ dan $n.\vec{b} = n.\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n.b_1 \\ n.b_2 \\ n.b_3 \end{pmatrix}$
  - $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$
  - $\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$
- Jika titik T membagi $\overline{RS}$ di dalam, maka berlaku: $\overline{RT} : \overline{TS}$ = m : n
- Jika titik T membagi $\overline{RS}$ di luar, maka berlaku: $\overline{RT} : \overline{TS}$ = m : (−n)
- Jika R(x_1, y_1) dan $S(x_2, y_2)$ di R^2, maka: $\vec{t} = \frac{m.\vec{s}+n.\vec{r}}{m+n} = \frac{m\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}+n.\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}}{m+n}$, dan koordinat titik T adalah $T(\frac{m.x_2+nx_1}{m+n}, \frac{m.y_2+ny_1}{m+n})$
- Jika $R(x_1, y_1, z_1)$ dan $S(x_2, y_2, z_2)$ di R^3, maka: $\vec{t} = \frac{m.\vec{s}+n.\vec{r}}{m+n} = \frac{m\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}+n.\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}}{m+n}$, dan koordinat titik T adalah $T(\frac{m.x_2+nx_1}{m+n}, \frac{m.y_2+ny_1}{m+n}, \frac{mz_2+nz_1}{m+n})$
- Perkalian scalar antara dua vektor adalah Perkalian vektor dengan vektor yang menghasilkan scalar
- Rumus Perkalian scalar dua vektor berikut:

$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha$

$\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

- sudut antara dua vektor tersebut adalah sudut yang dibentuk oleh kaki vektor $\vec{a}$ dan kaki vektor $\vec{b}$

Rumus sudut antara vektor $\vec{a}$ dengan vektor $\vec{b}$ adalah:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

- Proyeksi orthogonal (panjang proyeksi) vektor $\vec{a}$ pada $\vec{b}$ adalah:
- $|\overrightarrow{OC}| = |\vec{c}| = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|}$
- Proyeksi vektor $\vec{a}$ pada $\vec{b}$ adalah: $\vec{c} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^2}.\vec{b}$

D. Latihan Soal

Kerjakan latihan soal berikut dengan jujur dan benar.

1. Diketahui vektor $\vec{a}=\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ dan $\vec{c}=\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Tentukanlah :
   a. $\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}$
   b. $2\vec{a}+2\vec{c}$
   c. $5\vec{a}-3\vec{c}$
2. Diketahui $\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$ dan $\vec{b}=\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$. Tentukanlah :
   a. $\vec{a}+\vec{b}$
   b. $\vec{a}-\vec{b}$
   c. $-3\vec{a}+2\vec{b}$
3. Hitunglah $\vec{a}\cdot\vec{b}$ jika diketahui $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$ dan sudut antara $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ adalah $60°$!
4. Diketahui vektor $\vec{a}=i-2j+3k$ dan $\vec{b}=3i+j+2k$. Tentukanlah :
   a. $\vec{a}\cdot\vec{b}$
   b. besar sudut antara $\vec{a}$ dan $\vec{b}$
5. Diketahui vektor $\vec{a}=2i-3j+mk$ dan $\vec{b}=6i+2j-4k$. Tentukan nilai m jika $\vec{a}.\vec{b}=10$.
6. Diketahui segitiga PQR dengan $P(5, 1, 5)$, $Q(1, 4, 5)$, dan $R(3, 2, 1)$. Tentukanlah:
   a. panjang PR
   b. panjang PQ
   c. panjang proyeksi PR pada PQ
   d. proyeksi vektor PR pada PQ
7. Diketahui vektor $\vec{a}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b}=\begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}$. Tentukan nilai m agar vektor $(\vec{a}+m\vec{b})$ tegak lurus pada vektor $\vec{a}$
8. Tentukanlah koordinat titik P yang terletak pada ruas garis $\overline{AB}$ jika:
   a. $A(2, 0, 1)$, $B(10, 4, 5)$, dan $\overline{AP}:\overline{PB}=3:1$
   b. $A(1, 1, 1)$, $B(3, -2, 5)$, dan $\overline{AP}:\overline{PB}=3:-2$