KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
FUNGSI EKSPONEN

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini diharapkan peserta didik dapat menjelaskan konsep fungsi eksponen, mengidentifikasi sifat-sifat fungsi eksponen, menggambarkan grafik fungsi eksponen, dan menyelesaikan masalah terkait fungsi eksponen.

B. Uraian Materi

Untuk menyegarkan kembali ingatan Kalian tentang bilangan berpangkat (eksponen) yang sudah dipelajari di SMP, perhatikan sifat-sifat bilangan berpangkat berikut.

Jika a dan b bilangan real, p dan q bilangan rasional maka berlaku hubungan sebagai berikut:

1. $a^p x a^q = a^{p+q}$
2. $a^p : a^q = a^{p-q}$
3. $(a^p)^q = a^{pq}$
4. $(ab)^p = a^p . b^p$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \left(\frac{a^p}{b^p}\right)$
6. $a^{-p} = \frac{1}{a^p} (a \neq 0)$
7. $a^p = \frac{1}{a^{-p}}$
8. $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$
9. $\sqrt[p]{ab} = \sqrt[p]{a}.\sqrt[p]{b}$
10. $\sqrt[p]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[p]{a}}{\sqrt[p]{b}}$
11. $a^0 = 1$

Untuk memahami penggunaan sifat-sifat bilangan berpangkat di atas, perhatikan contoh berikut.

Contoh 1.

Tulislah bentuk-bentuk di bawah ini dalam bentuk pangkat bilangan bulat positif.

a. $2^3 \times 32$
b. $7^6 : 49$
c. $(2^3)^4$
d. $(a^2 \times b^3)^5$
e. $3^{-4} : 3^2$
f. $(p^{-4} : q^{-2})^{-3}$
g. $64^{\frac{5}{6}}$
h. $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$

Jawab

a. $2^3 \times 32 = 2^3 \times 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$
b. $7^6 : 49 = 7^6 : 7^2 = 7^{6-2} = 7^4$
c. $(2^3)^4 = 2^{3 \times 4} = 2^{12}$
d. $(a^2 \times b^3)^5 = (a^2)^5 \times (b^3)^5 = a^{10} \times b^{15}$

e. $3^{-4}: 3^2 = 3^{-4-2} = 3^{-6} = \frac{1}{3^6}$

e. $(p^{-4} : q^{-2})^{-3} = (p^{-4})^{-3}: (q^{-2})^{-3} = P^{12}: q^6 = \frac{p^{12}}{q^6}$

f. $64^{\frac{5}{6}} = (2^6)^{\frac{5}{6}} = 2^{6 \times \frac{5}{6}} = 2^5$

g. $\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}} = \frac{\sqrt[4]{2^4}}{\sqrt[4]{3^4}} = \frac{2^{\frac{4}{4}}}{3^{\frac{4}{4}}} = \frac{2}{3}$

Untuk memahami fungsi eksponen, coba Kalian perhatikan masalah berikut.

Seorang pedagang baju selalu mencatat penjualan dagangannya setiap hari seperti dalam tabel berikut:

Hari ke-	1	2	3	4	5	...	x
Jumlah baju terjual	2	4	8	16	32	...	
Bentuk pangkat	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5		2^x

Tabel 1. Hasil penjualan baju per hari

Pada bentuk urutan dari baris ke-1 dengan baris ke-3 di atas merepresentasikan suatu fungsi satu-satu dengan domain bilangan asli.

Fungsi $f: x \to f(x) = 2^x$ merupakan salah satu fungsi eksponen, sehingga perkembangan baju terjual tersebut merupakan salah satu contoh dari fungsi eksponen yang domainnya adalah bilangan cacah.

Fungsi $f: x \to a^x$, dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$ disebut fungsi eksponen, yang mempunyai domain bilangan real dan range bilangan positif. Bentuk umum fungsi eksponen adalah $f: x \to a^x$ atau $f(x) = a^x$ dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$. Pada fungsi eksponen $f(x) = a^x$, x disebut peubah dan daerah asal (domain) dari fungsi eksponen adalah himpunan bilangan real yaitu $D_f: \{-\infty < x < +\infty, x \in R\}$

Dari uraian di atas, Kalian dapat menyimpulkan bahwa fungsi eksponen adalah sebuah fungsi yang memetakan setiap x anggota himpunan bilangan real dengan tepat satu anggota bilangan real ka^x, dengan k suatu konstanta dan a bilangan pokok (basis) dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$.

Fungsi eksponen ini adalah salah satu fungsi yang cukup penting dalam matematika. Fungsi eksponen banyak sekali penerapannya, dan tidak hanya dalam matematika saja tetapi banyak pula berkaitan dengan pertumbuhan dan peluruhan. Selain itu nanti kita akan melihat, bahwa fungsi ini erat sekali hubungannya dengan fungsi logaritma.

Contoh fungsi eksponen:

1. $f(x) = 3^{x+1}$
2. $f(x) = 4^{2x}$
3. $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$

Menggambar sketsa grafik fungsi eksponen dapat dilakukan dengan langkah-langkah berikut.

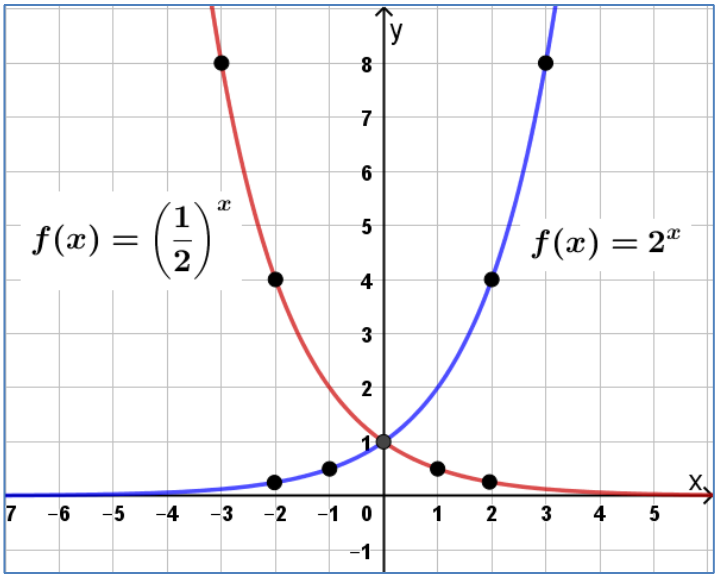
1. Buat daftar atau tabel yang menunjukkan hubungan antara nilai-nilai x dengan nilai-nilai $y = f(x) = a^x$.
2. Titik-titik dengan koordinat (x, y) yang diperoleh digambarkan pada bidang kartesius, kemudian dihubungkan dengan kurva mulus, sehingga diperoleh grafik fungsi eksponen $y = f(x) = a^x$.

Sebagai contoh, kita akan menggambar grafik fungsi $f(x) = 2^x$ dan $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Mula-mula dibuat tabel nilai fungsi berikut.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = 2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	2	4	8	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

Tabel 2. Nilai fungsi $f(x) = 2^x$ dan $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



Gambar 1. Grafik fungsi eksponen $f(x) = 2^x$ dan $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Dengan memperhatikan gambar di atas terlihat bahwa:

a. Domain kedua fungsi adalah himpunan semua bilangan real, $D_f = \{x \mid x \in R\}$ atau $(-\infty, \infty)$.
b. Rangenya berupa himpunan semua bilangan real positif, $R_f = \{y \mid y > 0, y \in R\}$ atau $(0, \infty)$.
c. Kedua grafik melalui titik (0, 1).
d. Kurva mempunyai asimtot datar yaitu garis yang didekati fungsi tapi tidak akan berpotongan dengan fungsi, sumbu X (garis $y = 0$).
e. Kedua grafik simetris terhadap sumbu Y
f. Grafik $f(x) = 2^x$ merupakan grafik yang monoton naik, sedangkan grafik $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ merupakan grafik yang monoton turun, dan keduanya berada di atas sumbu X (nilai fungsi senantiasa positif).

Dari grafik di atas, dapat disimpulkan bahwa fungsi $f: x \to a^x$, untuk $a > 1$ adalah fungsi naik dan untuk $0 < a < 1$ adalah fungsi turun. Karena range dari f adalah bilangan positif dan $a^0 = 1$, maka grafik fungsi $f: x \to a^x$ untuk $a > 0$ terletak di atas sumbu x dan melalui titik (0, 1).

Contoh 2.

Lukislah grafik fungsi $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ pada interval $-3 \le x \le 3$.

Jawab

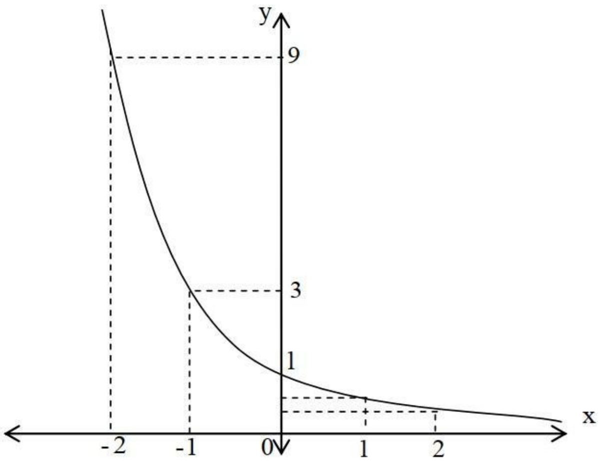
Buat tabel nilai fungsi berikut.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$	27	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$

Tabel 3. Nilai fungsi $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

Dari tabel nilai fungsi kita dapatkan pasangan koordinat kartesius sebagai berikut: $(-3, 27)$, $(-2, 9)$, $(-1, 3)$, $(0, 1)$, $\left(1,\ \frac{1}{3}\right)$, $\left(2,\ \frac{1}{9}\right)$, $\left(3,\ \frac{1}{27}\right)$.

Sketsa grafik fungsi $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$



Gambar 2. Grafik fungsi $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

Contoh 3.

Grafik sebuah fungsi eksponen $y = ka^x$ diketahui melalui titik (0, 5) dan (2, 20). Tentukan fungsi eksponen tersebut.

Jawab

Grafik fungsi melalui titik (0, 5), maka $5 = k.a^0$

$5 = k.1$

$k = 5$

Sehingga fungsi menjadi $y = 5.a^x$

Grafik fungsi melalui titik (2, 20), maka $20 = 5.a^2$

$4 = a^2$

$a = 2$

Jadi persamaan fungsi eksponennya adalah $y = 5.2^x$

Contoh 4.

Waktu paruh radium-226 adalah 1600 tahun. Sebanyak 50 gram radium-226 sample ditempatkan di fasilitas penyimpanan bawah tanah dan dimonitor.

a. Tentukan fungsi yang memodelkan massa radium-226 yang tersisa setelah *x* waktu paruh.

b. Gunakan model fungsi untuk memprediksi jumlah radium-226 yang tersisa setelah 4000 tahun.
c. Buat tabel nilai fungsi m(x) pada interval $0 \leq x \leq 5$.
d. Gambar grafik fungsi m(x) berdasarkan tabel nilai fungsi dan apa yang dapat diceritakan dari grafik tentang peluruhan radium-226?

Jawab

a. Diketahui masa awal adalah 50 gram dan faktor peluruhan $a = \frac{1}{2}$ (faktor peluruhan 1600 tahun).

Model fungsinya adalah $m(x) = 50.\left(\frac{1}{2}\right)^x$ dengan x jumlah periode waktu 1600 tahun.

b. Jumlah periode waktu yang mewakili 4000 tahun adalah $\frac{4000}{1600} = 2{,}5$

Jadi 4000 tahun mewakili 2,5 periode waktu paruh. Dengan mensubtitusi $x = 2{,}5$ pada model fungsi diperoleh

$m(x) = 50.\left(\frac{1}{2}\right)^x$

$m(2{,}5) = 50.\left(\frac{1}{2}\right)^{2{,}5}$

$m(2{,}5) \approx 8{,}84$

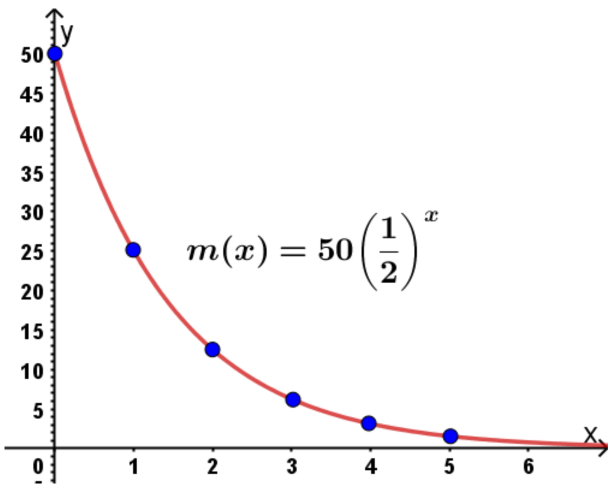
Jadi masa yang tersisa setelah 4000 tahun sekitar 8,84 gram.

c. Tabel nilai fungsi (menggunakan kalkulator):

x	0	1	2	3	4	5
$m(x) = 50.\left(\frac{1}{2}\right)^x$	50	25	12,5	6,25	3,125	1,562

Tabel 4. Nilai fungsi $m(x) = 50.\left(\frac{1}{2}\right)^x$

d. Grafik fungsi $m(x) = 50.\left(\frac{1}{2}\right)^x$ berdasarkan nilai dari tabel.



Gambar 3. Fungsi $m(x) = 50.\left(\frac{1}{2}\right)^x$

Contoh 5.

Aqila menabung sebesar Rp1000.000,00 di suatu bank selama 3 tahun dengan bunga majemuk sebesar 10% per tahun. Pada setiap akhir tahun bunga pada tahun yang bersangkutan ditambahkan dengan uang yang tersimpan sehingga seluruhnya menjadi modal awal tahun berikutnya. Berapa jumlah uang Aqila pada akhir tahun ketiga?

Jawab

Misalkan uang Aqila yang ditabung dinyatakan dengan M_0
Bunga majemuk bank dinyatakan dengan bilangan desimal i
Waktu penyimpanan = t tahun
Uang Aqila pada akhir tahun ke-t dinyatakan M_t

Bunga yang diberikan oleh bank adalah bunga majemuk, maka uang Aqila pada akhir tahun ke-t tumbuh secara eksponensial dengan besar Mt = $M_0(1+i)^t$

Diketahui M_0 = Rp1000.000,00, bunga majemuk i = 10%, dan waktu penyimpanan t = 3 tahun, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \text{Mt} &= M_0(1+i)^t \\ &= 1000.000(1+10\%)^3 \\ &= 1000.000\ (1{,}1)^3 \\ &= 1000.000\ (1{,}331) \\ &= 1.331.000 \end{aligned}$$

Jadi, besarnya uang Aqila pada akhir tahun ke-3 adalah Rp1.331.000,00.

C. Rangkuman

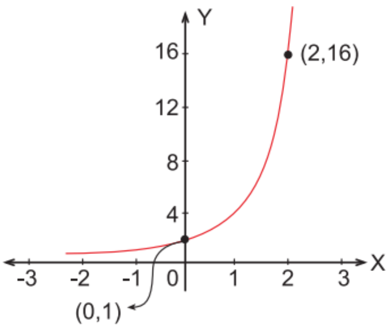
1. Fungsi eksponen adalah sebuah fungsi yang memetakan setiap x anggota himpunan bilangan real dengan tepat satu anggota bilangan real ka^x, dengan k suatu konstanta dan a bilangan pokok (basis) dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$.
2. Sifat-sifat fungsi eksponen $f(x) = ka^x$ dengan $a \neq 1$ sebagai berikut:
   a. Selalu memotong sumbu Y di titik (0, 1)
   b. Merupakan fungsi kontinu
   c. Tidak pernah memotong sumbu X sehingga dikatakan sumbu X sebagai asimtot mendatar
   d. f merupakan fungsi naik jika $a > 1$ dan merupakan fungsi turun jika $0 < a < 1$
   e. Grafik fungsi $f(x) = a^x$ dan $f(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ simetris terhadap sumbu Y.

D. Latihan Soal

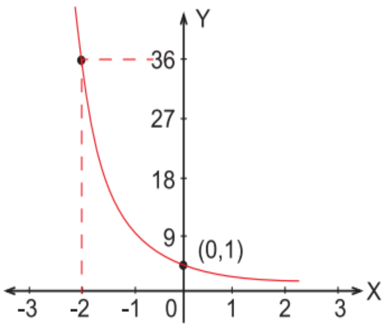
1. Sederhanakan bentuk $\frac{24a^{-7}b^{-2}c}{6a^{-2}b^{-3}c^{-6}}$.

2. Lukislah grafig fungsi eksponen berikut.
   a. $f(x) = 2^{x+1}$ pada interval $-3 \leq x \leq 3$
   b. $f(x) = 3^{x+1}$ pada interval $-3 \leq x \leq 3$

3. Tentukan fungsi eksponen dari sketsa grafik berikut.



Gambar (a)



gambar (b)

4. Pada pukul 08.00 pagi massa suatu zat radioaktif adalah 0,2 kg. Apabila diketahui laju peluruhan zat radioaktif tersebut 10% setiap jam, hitunglah sisa zat radioaktif itu pada pukul 14.00 siang?

KEGIATAN PEMBELAJARAN 2
PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN EKSPONEN

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 2 ini diharapkan peserta didik dapat mendeskripsikan persamaan dan pertidaksamaan eksponen, menentukan himpunan penyelesaian dari persamaan eksponen, dan menentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan eskponen.

B. Uraian Materi

Setelah Kalian mempelajari fungsi eksponen dan penggunaannya, kita akan memperluas pembahasan dengan mempelajari persaman eksponen dan pertidaksamaan eksponen.

1. Persamaan Eksponen

Persamaan eksponen adalah suatu persamaan yang memuat variabel (peubah) sebagai eksponen bilangan berpangkat atau persamaan yang bilangan pokoknya memuat variabel (peubah) *x*.

Contoh persamaan eksponen:
- $2^{3x-1} = 32^{2x}$ merupakan persamaan eksponen yang eksponennya memuat variable *x.*
- $16^{y} + 2.4^{y} + 1 = 0$ merupakan persamaan eksponen yang eksponennya memuat variabel *y*.

Ada beberapa bentuk persamaan eksponen, diantaranya:

a. Bentuk $a^{f(x)} = a^{p}$

Untuk menyelesaikan persamaan ini digunakan sifat:
Jika $a^{f(x)} = a^{p}$; a > 0 dan a ≠1, maka $f(x) = p$.

Contoh 1

Tentukan himpunan penyelesaian dari:

a. $5^{2x-1} = 625$
b. $2^{2x-7} = \frac{1}{32}$
c. $\sqrt{3^{3x-10}} = \frac{1}{27}\sqrt{3}$

Jawab

a. $5^{2x-1} = 625$
$5^{2x-1} = 5^{3}$
$2x - 1 = 3$
$2x = 4$
$x = 2$
Jadi himpunan penyelesaiannya adalah {2}

b. $2^{2x-7} = \frac{1}{32}$
$2^{2x-7} = 2^{-5}$
$2x - 7 = -5$
$2x = 2$

$x \quad = 1$
Jadi himpunan penyelesaiannya adalah {1}

c. $\sqrt{3^{3x-10}} = \frac{1}{27}\sqrt{3}$
$3^{\frac{3x-10}{2}} = 3^{-3}.3^{\frac{1}{2}}$
$3^{\frac{3x-10}{2}} = 3^{-\frac{5}{2}}$
$\frac{3x-10}{2} = -\frac{5}{2}$
$3x - 10 = -5$
$3x \quad = 5$
$x \quad = \frac{5}{3}$
Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $\left\{\frac{5}{3}\right\}$.

b. Bentuk $\boldsymbol{a^{f(x)} = a^{g(x)}}$

Penyelesaian persamaan ini digunakan sifat:

Jika $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ dengan $a > 0$ dan $a \neq 0$, maka $f(x) = g(x)$.

Contoh 2.

a. $9^{x^2+x} = 27^{x^2-1}$
b. $8^{2x+1} = 128^{x-3}$
c. $\sqrt[x+2]{8} = \sqrt[x-4]{32}$

Jawab

a. $9^{x^2+x} = 27^{x^2-1}$
$3^{2(x^2+x)} = 3^{3(x^2-1)}$
$2(x^2 + x) = 3(x^2 - 1)$
$2x^2 + 2x = 3x^2 - 3$
$x^2 - 2x - 3 = 0$
$(x - 3)(x + 1) = 0$
$x = 3$ atau $x = -1$
Jadi himpunan penyelesaiannya adalah {–1, 3}

b. $8^{2x+1} = 128^{x-3}$
$(2^3)^{(2x+1)} = (2^7)^{(x-3)}$
$2^{6x+3} = 2^{7x-21}$
$6x + 3 = 7x - 21$
$x = 24$
Jadi himpunan penyelesaiannya adalah { 24 }

c. $\sqrt[x+2]{8} = \sqrt[x-4]{32}$
$2^{\frac{3}{x+2}} = 2^{\frac{5}{x-4}}$
$\frac{3}{x+2} = \frac{5}{x-4}$
$3(x - 4) = 5(x + 2)$
$3x - 12 = 5x + 10$
$-2x = 22$
$x = -11$
Jadi himpunan penyelesaiannya adalah {–11}

c. Bentuk $a^{f(x)} = b^{f(x)}$

Penyelesaian persamaan ini digunakan sifat:
Jika $a^{f(x)} = b^{f(x)}$ dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$, $b > 0$ dan $b \neq 1$, dan $a \neq b$ maka $f(x) = 0$.

Contoh 3

a. $6^{x-3} = 9^{x-3}$

b. $7^{x^2-5x+6} = 8^{x^2-5x+6}$

Jawab

a. $6^{x-3} = 9^{x-3}$
$x - 3 = 0$
$x = 3$
Jadi himpunan penyelesaiannya adalah { 3 }

b. $7^{x^2-5x+6} = 8^{x^2-5x+6}$
$x^2 - 5x + 6 = 0$
$(x - 6)(x + 1) = 0$
$x = 6$ atau $x = -1$
Jadi himpunan penyelesaiannya adalah {–1, 6}

d. Bentuk $(f(x))^{g(x)} = (f(x))^{h(x)}$

Untuk menyelesaikan persamaan bentuk di atas perlu dipertimbangkan beberpa kemungkinan:

1) Persamaan berlaku untuk bilangan pokok = 1 atau $f(x) = 1$
2) Persamaan berlaku untuk bilangan pokok = -1, dengan syarat $g(x)$ dan $h(x)$ bernilai genap atau $g(x)$ dan $h(x)$ bernilai ganjil.
3) Persamaan berlaku untuk bilangan pokok = 0 atau $f(x) = 0$, dengan syarat $g(x)$ dan $h(x)$ bernilai positif.
4) Persamaan berlaku jika pangkatnya sama atau $g(x) = h(x)$, dengan syarat untuk bilangan pokok = 0, pangkat bernilai positif, atau untuk $f(x) = 0$ maka $g(x)$ dan $h(x)$ bernilai positif.

Contoh 5.

Tentukan himpunan penyelesaian $(3x - 10)^{x^2} = (3x - 10)^{2x}$

Jawab

(1) $f(x) = 1 \Leftrightarrow 3x - 10 = 1$
$\Leftrightarrow 3x = 11$
$\Leftrightarrow x = \frac{11}{3}$

(2) $f(x) = -1 \Leftrightarrow 3x - 10 = -1$
$\Leftrightarrow 3x = 9$
$\Leftrightarrow x = 3$

Sekarang periksa untuk $x = 3$ apakah $g(x)$ dan $h(x)$ sama-sama genap atau sama-sama ganjil.
$g(3) = 3^2 = 9$ (ganjil)
$h(3) = 2.3 = 6$ (genap)
berarti $x = 3$ bukan penyelesaian.

(3) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - 10 = 0$
$\Leftrightarrow x = \frac{10}{3}$

Periksa apakah untuk $x = \frac{10}{3}$, $g(x)$ dan $h(x)$ sama-sama positif.

$g(\frac{10}{3}) = (\frac{10}{3})^2 = \frac{100}{9} > 0$

$h(\frac{10}{3}) = 2.(\frac{10}{3}) = \frac{20}{3} > 0$

$g(x)$ dan $h(x) > 0$, maka $x = \frac{10}{3}$ merupakan penyelesaian.

(4) $g(x) = h(x) \Leftrightarrow x^2 = 2x$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x = 0$

$\Leftrightarrow x(x-2) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \; atau \; x = 2$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $\{0, 2, \frac{10}{3}, \frac{11}{3}\}$.

e. Bentuk $A(a^{f(x)})^2 + B(a^{f(x)}) + C = 0$

Untuk menyelesaikan persamaan di atas, dilakukan dengan cara mengubah persamaan tersebut ke bentuk persamaan kuadrat. Memisalkan $a^{f(x)} = p$, maka persamaan di atas dapat diubah menjadi persamaan kuadrat $Ap^2 + B.p + C = 0$.

Contoh 6.

Tentukan himpunan penyelesaian dari $2^{2x} - 2^{x+3} + 16 = 0$.

Jawab

$2^{2x} - 2^{x+3} + 16 = 0$

$2^{2x} - 2^x.2^3 + 16 = 0$

Dengan memisalkan $2^x = p$, maka persamaan menjadi

$p^2 - 8p + 16 = 0$

$(p-4)(p-4) = 0$

$p = 4$

Untuk $p = 4 \Rightarrow 2^x = 4$

$2^x = 2^2$

$x = 2$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah { 2 }.

2. Pertidaksamaan Eksponen

Setelah Kalian mempelajari materi persamaan eksponen, kita lanjutkan pembahasan pertidaksamaan eksponen. Sebelum membahas pertidaksamaan eksponen Kalian ingat kembali tentang sifat-sifat fungsi eksponen sebagai berikut:

- Untuk $a > 1$, fungsi $f(x) = a^x$ merupakan fungsi naik. Artinya, untuk setiap $x_1, x_2 \in R$, berlaku $x_1 < x_2$, jika dan hanya jika $f(x_1) < f(x_2)$.
- Untuk $0 < a < 1$, fungsi $f(x) = a^x$ merupakan fungsi turun. Artinya, untuk setiap $x_1, x_2 \in R$ berlaku $x_1 < x_2$ jika dan hanya jika $f(x_1) > f(x_2)$.

Berdasarkan sifat fungsi eksponen maka untuk menyelesaikan pertidaksamaan eksponen dapat menggunakan ketentuan:

a. Untuk a > 1

- Jika $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, maka $f(x) > g(x)$
- Jika $a^{f(x)} < a^{g(x)}$, maka $f(x) < g(x)$

tanda pertidaksamaan tetap

b. 0 < a < 1

- Jika $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, maka $f(x) < g(x)$
- Jika $a^{f(x)} < a^{g(x)}$, maka $f(x) > g(x)$

tanda pertidaksamaan berubah

Contoh 7.

Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan $(9)^{2x-4} \geq (\frac{1}{27})^{x^2-4}$.

Jawab

$(9)^{2x-4} \geq \left(\frac{1}{27}\right)^{x^2-4}$
$\Leftrightarrow (3^2)^{2x-4} \geq (3^{-3})^{x^2-4}$
$\Leftrightarrow 3^{4x-8} \geq 3^{-3x^2+12}$
$\Leftrightarrow 4x - 8 \geq -3x^2 + 12$
$\Leftrightarrow 3x^2 + 4x - 20 \geq 0$
$\Leftrightarrow \quad (3x + 10)(x - 2) \geq 0$
$\Leftrightarrow x \leq -\frac{10}{3}$ atau $x \geq 2$
Himpunan penyelesaiannya = $\left\{x | x \leq -\frac{10}{3} \text{ atau } x \geq 2\right\}$

Contoh 8.

Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan $2^{2x+1} - 5.2^{x+1} + 8 \geq 0$.

Jawab

$2^{2x+1} - 5.2^{x+1} + 8 \geq 0$
$\Leftrightarrow \quad 2.2^{2x} - 5.2.2^{x} + 8 \geq 0$ ………… (dibagi 2)
$\Leftrightarrow \quad 2^{2x} - 5.2^{x} + 4 \geq 0$
$\Leftrightarrow \quad (2^x)^2 - 5.2^{x} + 4 \geq 0$

Dengan memisalkan $2^x = p$, maka petidaksamaan menjadi:

$p^2 - 5p + 4 \geq 0$
$\Leftrightarrow \quad (p - 1)(p - 4) \geq 0$
$\Leftrightarrow \quad p \leq 1$ atau $p \geq 4$
$\Leftrightarrow \quad 2^x \leq 2^0$ atau $2^x \geq 2^2$
$\Leftrightarrow \quad x \leq 0$ atau $x \geq 2$
Jadi himpunan penyelesaiannya = $\{x | x \leq 0 \text{ atau } x \geq 2\}$

C. Rangkuman

1. Persamaan eksponen
   Untuk $a > 0$, $a \neq 1$; $b > 0$, $b \neq 1$, maka berlaku:
   a. Jika $a^{f(x)} = a^p$, maka $f(x) = p$.
   b. Jika $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, maka $f(x) = g(x)$.
   c. Jika $a^{f(x)} = b^{f(x)}$, maka $f(x) = 0$.
   d. Jika $[h(x)]^{f(x)} = [h(x)]^{g(x)}$, maka:
      - $f(x) = g(x)$
      - $h(x) = 1$
      - $h(x) = 0$ untuk $f(x) > 0$ dan $g(x) > 0$
      - $h(x) = -1$ untuk $f(x)$ dan $g(x)$ keduanya ganjil atau keduanya genap

   e. Jika $A\{a^{f(x)}\}^2 + B\{a^{f(x)}\} + C = 0$, maka dapat diselesaikan dengan cara mengubah ke bentuk persamaan kuadrat.

2. Pertidaksamaan eksponen
   a. Untuk a > 1
      - Jika $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, maka $f(x) > g(x)$
      - Jika $a^{f(x)} < a^{g(x)}$, maka $f(x) < g(x)$

   b. Jika 0 < a < 1
      - Jika $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, maka $f(x) < g(x)$
      - Jika $a^{f(x)} < a^{g(x)}$, maka $f(x) > g(x)$

D. Latihan Soal

Tentukan himpunan penyelesaian dari:

1. $2^{x^2-3x} = 16$
2. $25^{x+2} = 5^{3x-4}$
3. $7^{2-x} - 49^{2-x} + 42 = 0$
4. $2^{4x-5} > 8^{2x+7}$
5. $5^{2x} - 6.5^{x+1} + 125 > 0$

KEGIATAN PEMBELAJARAN 3
FUNGSI LOGARITMA

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 3 ini diharapkan peserta didik dapat mendeskripsikan fungsi logaritma, menentukan penyelesaian fungsi logaritma, menggunakan masalah kontekstual yang terkait dengan logaritma, dan menyajikan fungsi logaritma, serta menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan fungsi logaritma.

B. Uraian Materi

1. Pengertian Logaritma

Setelah Kalian selesai mempelajari fungsi eksponen, mari kita kembangkan pembahasan kita pada materi logaritma. Untuk memahami pengertian logaritma dan sifatnya, coba Kalian perhatikan pernyataan $p \times q = r$. Bagaimanakah menyatakan p dalam q dan r? Jawabnya adalah $p = \frac{r}{q}$, dengan $q \neq 0$. Kemudian kita perhatikan pernyataan $3^2 = 9$. Bagaimanakah menyatakan 3 dalam 2 dan 9? Jawabnya $3 = \sqrt[2]{9}$. Bagaimanakah menyatakan 2 dalam 3 dan 9? Jawabnya 2 adalah pangkat dari 3 sehingga $3^2 = 9$. Jika kita ambil secara umum $a^y = x$, maka y adalah eksponen dari a sehingga $a^y = x$, dan pernyataan untuk y ini bisa ditulis dalam bentuk $y = {}^a\log x$ atau x dengan a adalah bilangan dasar atau basis dan y adalah eksponennya.

Untuk lebih jelas, coba perhatikan tabel berikut.

Pada $f: x \to y = 2^x$				Pada $f^{-1}; y \to x = {}^2\log y$				
Persoalan		Jawab		Persoalan				Jawab
				Eksponen			Logaritma	
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$x = 3$	$2^3 = ?$	8		$2^x = 8$	$x = ?$	$\Leftrightarrow$	${}^2\log 8 = ?$	3
$x = 2$	$2^2 = ?$	4		$2^x = 4$	$x = ?$	$\Leftrightarrow$	${}^2\log 4 = ?$	2
$x = 1$	$2^1 = ?$	2		$2^x = 2$	$x = ?$	$\Leftrightarrow$	${}^2\log 2 = ?$	1
$x = 0$	$2^0 = ?$	1		$2^x = 1$	$x = ?$	$\Leftrightarrow$	${}^2\log 1 = ?$	0
$x = -1$	$2^{-1} = ?$	$\frac{1}{2}$		$2^x = \frac{1}{2}$	$x = ?$	$\Leftrightarrow$	${}^2\log \frac{1}{2} = ?$	-1
$x = -2$	$2^{-2} = ?$	$\frac{1}{4}$		$2^x = \frac{1}{4}$	$x = ?$	$\Leftrightarrow$	${}^2\log \frac{1}{4} = ?$	-2
$x = -3$	$2^{-3} = ?$	$\frac{1}{8}$		$2^x = \frac{1}{8}$	$x = ?$	$\Leftrightarrow$	${}^2\log \frac{1}{8} = ?$	-3
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Tabel 1. Hasil perpangkatan dan logaritma

Dari tabel di atas dapat dilihat antara lain:

$$2^3 = 8 \Leftrightarrow {}^2\log 8 = 3$$
$$2^2 = 4 \Leftrightarrow {}^2\log 4 = 2$$
$$2^1 = 2 \Leftrightarrow {}^2\log 2 = 1$$
$$2^0 = 1 \Leftrightarrow {}^2\log 1 = 0$$
$$2^{-1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow {}^2\log \frac{1}{2} = -1$$

Sehingga disimpulkan $2^x = y \Leftrightarrow {}^2\log y = x$

Jika bilangan pokoknya a, dari ${}^a\log y = x$ atau $x = {}^a\log y$ diperoleh:

$$f^{-1}(y) = {}^a\log y \quad \text{sehingga } f^{-1}(x) = {}^a\log x$$

Jika f^{-1} dinamakan $g(x)$, maka $g(x) = {}^a\log x$. Fungsi $g: x \to {}^a\log x$ dinamakan fungsi logaritma.

Dari paparan di atas cukup jelas bahwa logaritma secara dasar merupakan operasi matematika yang merupakan kebalikan (invers) dari eksponen. Artinya, untuk mencari nilai dari suatu bilangan logaritma harus membalikkan fungsi dari eksponensial.

Logaritma didefinisikan sebagai berikut:

Misalkan a adalah bilangan positif yang tidak sama dengan 1 ($0 < a < 1$ atau $a > 1$) dan b bilangan positif ($b > 0$)

$${}^a\log b = c \text{ jika dan hanya jika } a^c = b$$

dimana:

a disebut bilangan pokok atau basis logaritma ($0 < a < 1$ atau $a > 1$)
b disebut numerus, dengan syarat $b > 0$.
c disebut hasil logaritma

Dari definisi bahwa logaritma merupakan invers dari eksponen, maka kita dapat menurunkan sifat-sifat logaritma dari sifat-sifat eksponen sebagai berikut:

Untuk $a > 0$ dan $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, $m > 0$ dan $m \neq 1$, $a, b, c, m, n \in R$, berlaku:

a. ${}^a\log a = 1$
b. ${}^a\log 1 = 0$
c. ${}^a\log a^n = n$
d. ${}^a\log (b \times c) = {}^a\log b + {}^a\log c$
e. ${}^a\log \left(\frac{b}{c}\right) = {}^a\log b - {}^a\log c$
f. ${}^a\log b^n = n.\ {}^a\log b$
g. ${}^a\log b = \frac{{}^m\log b}{{}^m\log a} = \frac{1}{{}^b\log a}$
h. ${}^a\log b \times {}^b\log c = {}^a\log c$

Sifat-sifat logaritma sangat dibutuhkan dalam menyelesaikan masalah-masalah logaritma. Untuk lebih memahami sifat-sifat logaritma, silahkan perhatikan contoh-contoh berikut:

Contoh 1.

Sederhanakan bentuk logaritma berikut:

a. ${}^2\log 8 + {}^2\log 4$

b. ${}^a\log\frac{1}{b} \times {}^b\log\frac{1}{c} \times {}^c\log\frac{1}{a}$

c. ${}^3\log 24 - {}^3\log 2\sqrt{3} + 2.\ {}^3\log\frac{1}{9} + {}^3\log 2\frac{1}{4}$

Jawab

a. ${}^2\log 8 + {}^2\log 4 = {}^2\log(8 \times 4)$

$= {}^2\log 32$

$= {}^2\log 2^5$

$= 5.\ {}^2\log 2$

$= 5.1$

$= 5$

b. ${}^a\log\frac{1}{b} \times {}^b\log\frac{1}{c} \times {}^c\log\frac{1}{a} = {}^a\log b^{-1} \times {}^b\log c^{-1} \times {}^c\log a^{-1}$

$= (-\ {}^a\log b) \times (-\ {}^b\log c) \times (-\ {}^c\log a)$

$= -\ {}^a\log b \times {}^b\log c \times {}^c\log a$

$= -\ {}^a\log a$

$= -1$

c. ${}^3\log 24 - {}^3\log 2\sqrt{3} + 2.\ {}^3\log\frac{1}{9} + {}^3\log 2\frac{1}{4}$

$$= {}^3\log 24 - {}^3\log 2\sqrt{3} + {}^3\log\left(\frac{1}{9}\right)^2 + {}^3\log\frac{9}{4}$$

$$= {}^3\log\frac{24 \times \frac{1}{81} \times \frac{9}{4}}{2\sqrt{3}}$$

$$= {}^3\log\frac{\frac{2}{3}}{2\sqrt{3}}$$

$$= {}^3\log\frac{1}{3\sqrt{3}} = {}^3\log\frac{1}{3^{\frac{3}{2}}}$$

$$= {}^3\log 3^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2}$$

Contoh 2.

Diketahui ${}^5\log 3 = a$ dan ${}^3\log 4 = b$, tentukan ${}^{12}\log 75$ dalam a dan b.

Jawab

$${}^{12}\log 75 = \frac{{}^3\log 75}{{}^3\log 12} = \frac{{}^3\log(3 \times 25)}{{}^3\log(3 \times 4)}$$

$$= \frac{{}^3\log 3 + {}^3\log 25}{{}^3\log 3 + {}^3\log 4} = \frac{{}^3\log 3 + {}^3\log 5^2}{{}^3\log 3 + {}^3\log 4}$$

$$= \frac{1 + 2.{}^3\log 5}{1 + {}^3\log 4}$$

$$= \frac{1 + 2 \times \frac{1}{a}}{1 + b} = \frac{a + 2}{(1 + b)a}$$

Contoh 3.

Diketahui ${}^{9}\log 8 = 3m$, tentukan ${}^{4}\log 3$.

Jawab

$${}^{3^2}\log 2^3 = 3m$$
$$\frac{3}{2}\,.{}^{3}\log 2 = 3m$$
$${}^{3}\log 2 = \frac{2}{3} \times 3m = 2m$$

Sehingga diperoleh

$${}^{4}\log 3 = \frac{1}{{}^{3}\log 3} = \frac{1}{{}^{3}\log 2^2} = \frac{1}{2 \times {}^{3}\log 2} = \frac{1}{2 \times 2m} = \frac{1}{4m}$$

2. Fungsi Logaritma

Logaritma adalah invers dari perpangkatan atau eksponen. Oleh karena itu fungsi logaritma adalah invers dari fungsi eksponen. Fungsi logaritma didefinisikan sebagai berikut.

> Fungsi logaritma dengan bilangan pokok a ($a > 0$ dan $a \neq 1$) adalah fungsi yang mempunyai bentuk umum:
>
> $$y = f(x) = {}^{a}\log x$$
>
> Fungsi $y = f(x) = {}^{a}\log x$ merupakan fungsi invers dari fungsi eksponen $y = f(x) = a^x$

Beberapa hal yang perlu diperhatikan pada fungsi logaritma $y = f(x) = {}^{a}\log x$.

a. a adalah bilangan pokok atau basis bagi fungsi $f(x) = {}^{a}\log x$ dengan ketentuan $a > 0$ dan $a \neq 1$ ($0 < a < 1$ atau $a > 0$).

b. Daerah asal (domain) fungsi $f(x) = {}^{a}\log x$ adalah $D_f = \{x \mid x > 0, x \in \boldsymbol{R}\}$

c. Daerah hasil (range) fungsi $f(x) = {}^{a}\log x$ adalah $R_f = \{y \mid y \in \boldsymbol{R}\}$

Menggambar sketsa grafik fungsi logaritma dapat dilakukan dengan langkah-langkah berikut.

1. Buat daftar atau tabel yang menunjukkan hubungan antara nilai-nilai x dengan nilai-nilai $y = f(x) = {}^{a}\log x$.
2. Titik-titik dengan koordinat (x, y) yang diperoleh digambarkan pada bidang kartesius, kemudian dihubungkan dengan kurva mulus, sehingga diperoleh grafik fungsi logaritma $y = f(x) = {}^{a}\log x$.

Menggambar Grafik Fungsi Logaritma dengan Basis $a > 1$

Sifat-sifat fungsi logaritma $f : x \to {}^{a}\log x$ dengan basis $a > 1$ dapat dipelajari melalui grafik fungsi logaritma $y = f(x) = {}^{a}\log x$.

Contoh 4.

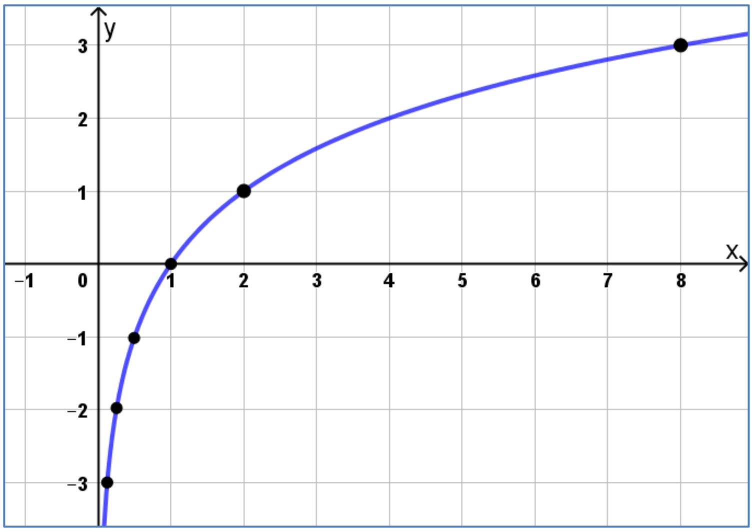
Gambar grafik fungsi $y = f(x) = {}^{2}\log x$ ($x > 0$ dan $x \in R$)

Jawab

Tabel yang menunjukkan hubungan antara x dengan $y = f(x) = {}^2\log x$ sebagai berikut.

x	$\to 0$	...	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	...	$\to \infty$
$y = {}^2\log x$	$\to -\infty$	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...	$\to 0$

Setiap titik (x, y) yang diperoleh pada tabel di atas digambar pada bidang kartesius, selanjutnya titik-titik tersebut dihubungkan dengan kurva mulus sehingga diperoleh grafik fungsi logaritma $y = f(x) = {}^2\log x$ berikut.



Gambar 1. Grafik fungsi $y = f(x) = {}^2\log x$

Berdasarkan grafik di atas, kita dapat mempelajari sifat-sifat fungsi logaritma $y = f(x) = {}^2\log x$ sebagai berikut.

a. Jika nilai x bertambah besar maka nilai $y = f(x) = {}^2\log x$ juga menjadi besar, tetapi pertambahan nilai y lebih lambat dibandingkan dengan pertambahan nilai x.

b. Fungsi logaritma $y = f(x) = {}^2\log x$ adalah **fungsi monoton naik**, sebab grafik ini naik dari kiri-bawah ke kanan-atas. Dalam bahasa logika matematika ditulis:

$$x_2 > x_1 \Rightarrow {}^2\log x_2 > {}^2\log x_1$$

c. Grafik fungsi logaritma $y = f(x) = {}^2\log x$ memotong sumbu X di titik $(1, 0)$.

d. Grafik fungsi logaritma $y = f(x) = {}^2\log x$ selalu berada di sebelah kanan sumbu Y atau $x > 0$. Ini berarti grafik fungsi logaritma $y = f(x) = {}^2\log x$ tidak pernah memotong sumbu Y. Sumbu Y bertindak sebagai asimtot tegak bagi fungsi logaritma $y = f(x) = {}^2\log x$.

e. Fungsi logaritma $y = f(x) = {}^2\log x$ terdefinisi untuk $x > 0$ dan $x \in \boldsymbol{R}$, sehingga domain fungsi f adalah $D_f = \{x \mid x > 0 \text{ dan } x \in \boldsymbol{R}\}$.

f. Fungsi logaritma $y = f(x) = {}^2\log x$ dapat bernilai positif, nol, atau negatif, sehingga range fungsi f adalah $R_f = \{y \mid y \in \boldsymbol{R}\}$.

g. Fungsi logaritma $y = f(x) = {}^2\log x$ merupakan fungsi bijektif atau korespondensi satu-satu.

***Menggambar Grafik Fungsi Logaritma dengan Basis* $0 < a < 1$**

Sifat-sifat fungsi logaritma $f: x \to {}^{a}\log x$ dengan basis $0 < a < 1$ dapat dipelajari melalui grafik fungsi logaritma $y = f(x) = {}^{a}\log x$.

Contoh 5.

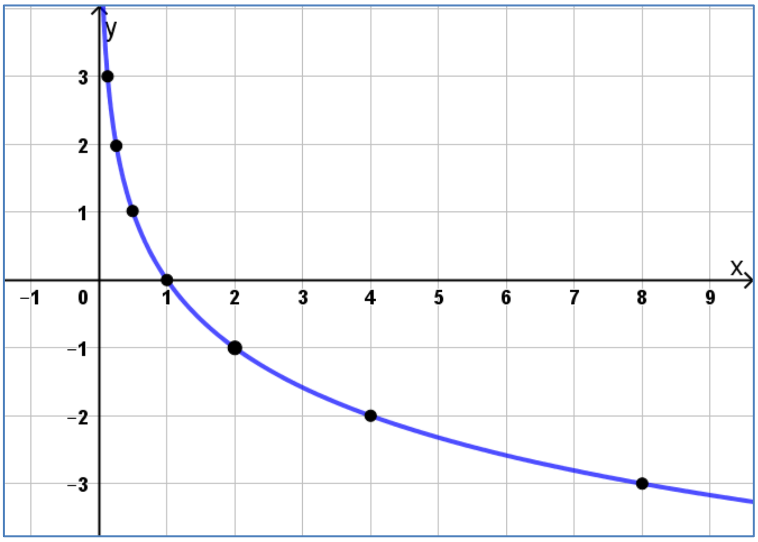
Gambar grafik fungsi $y = f(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log x$ ($x > 0$ dan $x \in R$)

Jawab

Tabel yang menunjukkan hubungan antara x dengan $y = f(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log x$ sebagai berikut.

x	$\to 0$	...	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	...	$\to \infty$
$y = {}^{\frac{1}{2}}\log x$	$\to \infty$	...	3	2	1	0	-1	-2	-3	...	$\to -\infty$

Setiap titik (x, y) yang diperoleh pada tabel di atas digambar pada bidang kartesius, selanjutnya titik-titik tersebut dihubungkan dengan kurva mulus sehingga diperoleh grafik fungsi logaritma $y = f(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log x$ berikut.



Gambar 2. Grafik fungsi $y = f(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log x$

Berdasarkan grafik di atas, kita dapat mempelajari sifat-sifat fungsi logaritma $y = f(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log x$ sebagai berikut.

a. Jika nilai x bertambah besar maka nilai $y = f(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log x$ semakin kecil dengan pengurangan yang semakin melambat.

b. Fungsi logaritma $y = f(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log x$ adalah **fungsi monoton turun**, sebab grafik ini turun dari kiri-atas ke kanan-bawah. Dalam bahasa logika matematika ditulis:

$$x_2 > x_1 \Rightarrow {}^{\frac{1}{2}}\log x_2 < {}^{\frac{1}{2}}\log x_1$$

c. Grafik fungsi logaritma $y = f(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log x$ memotong sumbu X di titik (1, 0).

d. Grafik fungsi logaritma $y = f(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log x$ selalu berada di sebelah kanan sumbu Y atau $x > 0$. Ini berarti grafik fungsi logaritma $y = f(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log x$ tidak pernah memotong sumbu Y. Sumbu Y bertindak sebagai asimtot tegak bagi fungsi logaritma $y = f(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log x$.

e. Fungsi logaritma $y = f(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log x$ terdefinisi untuk $x > 0$ dan $x \in \boldsymbol{R}$, sehingga domain fungsi f adalah $D_f = \{x \mid x > 0 \text{ dan } x \in \boldsymbol{R}\}$.

f. Fungsi logaritma $y = f(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log x$ dapat bernilai positif, nol, atau negatif, sehingga range fungsi f adalah $R_f = \{y \mid y \in \boldsymbol{R}\}$.

g. Fungsi logaritma $y = f(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log x$ merupakan fungsi bijektif atau korespondensi satu-satu.

Setelah Kalian mempelajari tentang grafik fungsi logaritma di atas, maka secara umum dapat kita simpulkan sifat-sifat fungsi logaritma sebagai berikut:

a. Selalu memotong sumbu X di titik (1,0).
b. Merupakan fungsi kontinu.
c. Tidak pernah memotong sumbu Y sehingga dikatakan sumbu Y sebagai asimtot tegak.
d. f merupakan fungsi naik jika $a > 1$ dan merupakan fungsi turun jika $0 < a < 1$.
e. Grafik fungsi $f(x) = {}^{2}\log x$ dan $f(x) = {}^{\frac{1}{2}}\log x$ simetris terhadap sumbu X.

Konsep dan fungsi logaritma sangat bermanfaat dalam kehidupan sehari-hari. Misalnya dalam ilmu kimia, logaritma digunakan untuk menentukan kadar keasaman suatu larutan. Dalam ilmu fisika, logaritma digunakan untuk menentukan taraf intensitas suatu bunyi. Logaritma juga digunakan untuk menentukan besarnya skala Richter yang biasa digunakan dalam satuan skala besarnya kegempaan. Fungsi logaritma juga bisa digunakan dalam ilmu perbankan, yaitu untuk menghitung besarnya bunga majemuk yang termasuk fungsi pertumbuhan (monoton naik).

Untuk mengetahui lebih jauh pemanfaatan fungsi logaritma dalam kehidupan sehari-hari, coba Kalian perhatikan beberapa contoh berikut.

Contoh 6.

Apa yang Kalian rasakan ketika minum air perasan buah jeruk? Kemungkinan besar ada rasa agak asam yang Kalian rasakan. Berbeda ketika Kalian minum air mineral, pasti rasa netral yang dirasakan. Rasa asam dan netral itu karena adanya kadar keasaman pada larutan yang diminum. Orang kimia mengukur kadar keasaman larutan dengan besaran yang disebut pH, yang didefinisikan sebagai fungsi logaritma p(t) = –log t, dengan t konsentrasi ion hidrogen ($^{+}$H) yang dinyatakan dalam mol perliter (mol/L). Nilai pH biasanya dibulatkan dalam satu decimal. Mari kita mencoba untuk menghitung berapa pH suatu larutan yang konsentrasi ion hidrogennya $2{,}5 \times 10^{-5}$ mol/L?

Jawab

Pada larutan yang akan kita hitung pH-nya ini diketahui konsentrasi ion hidrogen $t = 2{,}5 \times 10^{-5}$, sehingga diperoleh

$p(t) = -\log t$
$p(t) = -\log (2{,}5 \times 10^{-5})$

$p(t) = -(\log 2{,}5 + \log 10^{-5})$
$p(t) = -(0{,}4 - 5) = 4{,}6$ ………. (nilai log 2,5 dengan kalkulator 0,39794)

Jadi, nilai pH larutan tersebut adalah 0,4.

Contoh 7.

Adinda adalah seorang pelajar kelas XII di kota Tangerang. Ia senang berhemat dan menabung uang. Selama ini dia berhasil menabung uangnya sejumlah Rp5.000.000,00 di dalam sebuah celengan yang terbuat dari tanah liat. Agar uangnya lebih aman, ia menabung uangnya di sebuah bank dengan bunga 5% per tahun. Berapa lama Adinda menyimpan uang tersebut agar menjadi dua kali lipat?

Jawab

Misalkan:
M_0 = Modal Awal
M_t = Modal setelah menabung t tahun
i = bunga pertahun

Diketahui modal awal (M_0) = Rp5.000.000,00 dan uang tabungan setelah sekian tahun (M_t) = $2 \times M_0$ = Rp10.000.000,00., besar bunga yang disediakan bank untuk satu tahun adalah i =5% = 0,05.

Perhatikan pola pertambahan jumlah uang Adinda setiap akhir tahun pada tabel berikut.

Akhir Tahun (t)	Bunga (5% × Total Uang)	Total = Modal + bunga	Pola Total Uang saat t
0	Rp. 0	Rp. 5.000.000	$5.000.000(1+0{,}05)^0$
1	Rp. 250.000	Rp. 5.250.000	$5.000.000(1+0{,}05)^1$
2	Rp. 262.500	Rp. 5.512.500	$5.000.000(1+0{,}05)^2$
3	Rp. 275.625	Rp. 5.788.125	$5.000.000(1+0{,}05)^3$
4	Rp. 289.406,25	Rp. 6.077.531,25	$5.000.000(1+0{,}05)^4$
5	Rp. 303.876,5625	Rp. 6.381.407,813	$5.000.000(1+0{,}05)^5$
6	Rp. 319.070,3906	Rp. 6.700.478,203	$5.000.000(1+0{,}05)^6$
7	Rp. 335.023,9102	Rp. 7.035.502,113	$5.000.000(1+0{,}05)^7$
8	Rp. 351.775,1057	Rp. 7.387.277,219	$5.000.000(1+0{,}05)^8$
…	…	…	…
t			5.000.000(1+0,05)t

Dari tabel terlihat:
$M_t = M_0 (1 + i)^t$
$10.000.000 = 5.000.000(1 + 0{,}05)^t$

$(1+0{,}05)^t = \frac{10.000.000}{5.000.000} = 2$

Gunakan sifat logaritma $\log p^n = n.\log p$

$\log (1{,}05)^t = \log 2$

$t.\log (1{,}05) = \log 2$

$t = \frac{log\ (1{,}05)}{loglog\ 2}$ (gunakan kalkulator atau table logaritma)

t = 14,04

Jadi, tabungan Adinda akan menjadi dua kali lipat setelah 14,04 tahun.

Catatan:
Dalam logaritma, jika bilangan pokoknya 10, maka bilangan pokoknya sering tidak dituliskan, sehingga $^{10}\log 7$ bisa ditulis log 7 saja.

C. Rangkuman

- Fungsi logaritma merupakan invers dari fungsi eksponen. Bentuk umum fungsi logaritma adalah

  $y = f(x) = {}^{a}\log x$, dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$, $x > 0$, $a, x, y \in R$.
- Daerah asal (domain) fungsi logaritma $y = f(x) = {}^{a}\log x$ adalah $D_f = \{ x \mid x > 0,\ x \in R \}$
- Daerah hasil (range) fungsi logaritma $y = f(x) = {}^{a}\log x$ adalah $R_f = \{y \mid y \in R\}$.
- Fungsi logaritma $y = f(x) = {}^{a}\log x$ merupakan fungsi monoton naik untuk $a > 1$, dan merupakan fungsi monoton turun untuk $0 < a < 1$.

D. Latihan Soal

1. Tentukan nilai logaritma berikut:
   a. $^{8}\log 32$
   b. $\frac{1}{^{3}\log 6} + \frac{1}{^{2}\log 6}$
   c. $^{3}\log 18 - {}^{3}\log 2$
2. Diketahui $^{3}\log 4 = a$ dan $^{3}\log 5 = b$, tentukan $^{8}\log 20$.
3. Tentukan nilai dari $\frac{\left({}^{5}\log 10\right)^2 - \left({}^{5}\log 2\right)^2}{^{5}\log\sqrt{20}}$
4. Tabel berikut merupakan data naiknya suhu logam setelah dipanaskan dalam waktu tertentu.

x = waktu	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27
y = suhu	-2	-1	0	1	2	3

   a. Berdasarkan tabel di atas, tulislah persamaan yang menyatakan hubungan antara waktu dengan suhu logam yang dipanaskan.
   b. Gambar grafik fungsi yang menggambarkan hubungan waktu dan suhu.

KEGIATAN PEMBELAJARAN 4
PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN LOGARITMA

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 4 ini diharapkan peserta didik dapat mendeskripsikan persamaan dan pertidaksamaan logaritma, menentukan himpunan penyelesaian dari persamaan logaritma, dan menentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan logaritma.

B. Uraian Materi

1. Persamaan Logaritma

Persamaan logaritma adalah persamaan yang numerusnya mengandung variabel dan tidak menutup kemungkinan bilangan pokoknya juga mengandung variabel. Contoh persamaan logaritma:

a. ${}^{2}\log(x-2) + {}^{2}\log(x-3) = 1$

b. $\log(x-1) + \log(x-2) = \log(3x+2)$

c. ${}^{x}\log(x+2) + {}^{x}\log(x-3) + {}^{x}\log 2 = {}^{x}\log 12$

contoh (a) dan (b) adalah contoh persamaan logaritma yang numerusnya mengandung variabel x, sedangkan contoh (c) adalah contoh persamaan logaritma yang numerus dan bilangan pokoknya mengandung variabel.

Ada beberapa bentuk persamaan logaritma, antara lain:

1. Bentuk ${}^{a}\log f(x) = {}^{a}\log p$

Jika ${}^{a}\log f(x) = {}^{a}\log p$, maka $f(x) = p$ asalkan $f(x) > 0$

Contoh 1.

Tentukanlah himpunan penyelesaian dari persamaan logaritma

$${}^{2}\log(x-2) + {}^{2}\log(x-3) = 1$$

Jawab

${}^{2}\log(x-2) + {}^{2}\log(x-3) = 1$

Syarat bagi numerus : (i). $x - 2 > 0$ atau $x > 2$
(ii). $x - 3 > 0$ atau $x > 3$
jadi syarat numerusnya harus $x > 3$.

Penyelesaian persamaan

$$\begin{aligned}
& {}^{2}\log(x-2) + {}^{2}\log(x-3) = 1 \\
\Leftrightarrow\ & {}^{2}\log(x-2)(x-3) = {}^{2}\log 2 \\
\Leftrightarrow\ & (x-2)(x-3) = 2 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 - 5x + 6 - 2 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 - 5x + 4 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (x-1)(x-4) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x = 1 \text{ atau } x = 4.
\end{aligned}$$

dari persyaratan numerus diperoleh $x > 3$, sehingga nilai x yang memenuhi persamaan logaritma adalah $x = 4$.

Jadi, himpunan penyelesaian adalah { 4 }.

2. Bentuk ${}^{a}\log f(x)$ = ${}^{b}\log f(x)$

Jika ${}^{a}\log f(x) = {}^{b}\log f(x)$ (dengan a $\neq$ b), maka $f(x) = 1$

Contoh 2.

Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan logaritma

$${}^{3}\log (x^2 - x - 1) = {}^{7}\log (x^2 - x - 1)$$

Jawab

${}^{3}\log (x^2 - x - 1) = {}^{7}\log (x^2 - x - 1)$, maka
$\Leftrightarrow \quad x^2 - x - 1 = 1$
$\Leftrightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0$
$\Leftrightarrow \quad (x - 2)(x + 1) = 0$
$\Leftrightarrow \quad x = 2$ atau $x = -1$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{-1, 2\}$

3. Bentuk ${}^{a}\log$ f(x) = ${}^{a}\log$ g(x)

Jika ${}^{a}\log f(x) = {}^{a}\log g(x)$, maka $f(x) = g(x)$ asalkan $f(x)$ dan $g(x)$ keduanya positif.

Contoh 3.

Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan

$$\log (x - 1) + \log (x - 2) = \log (3x + 2)$$

Jawab

$\log (x - 1) + \log (x - 2) = \log (3x + 2)$

syarat bagi numerus : (i). $x - 1 > 0$ atau $x > 1$
(ii). $x - 2 > 0$ atau $x > 2$
(iii). $3x + 2 > 0$ atau $x > -\frac{2}{3}$
Sehingga syarat ini mengharuskan $x > 2$

Penyelesaian persamaan:

$\log (x - 1) + \log (x - 2) = \log (3x + 2)$
$\Leftrightarrow \quad \log (x - 1)(x - 2) = \log (3x + 2)$
$\Leftrightarrow \quad (x - 1)(x - 2) = (3x + 2)$
$\Leftrightarrow \quad x^2 - 3x + 2 = 3x + 2$
$\Leftrightarrow \quad x^2 - 6x = 0$
$\Leftrightarrow \quad x(x - 6) = 0$
$\Leftrightarrow \quad x = 0$ atau $x = 6$

Dari persyaratan numerus mengharuskan $x > 2$, sehingga nilai x yang memenuhi adalah $\boldsymbol{x = 6}$.
Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{ 6 \}$

4. Bentuk ${}^{h(x)}\log f(x)$ = ${}^{h(x)}\log g(x)$

Jika ${}^{h(x)}\log f(x) = {}^{h(x)}\log g(x)$, maka $f(x) = g(x)$ asalkan $f(x)$ dan $g(x)$ keduanya positif serta $h(x) > 0$ dan $h(x) \neq 1$.

Contoh 4.

Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan

$$^{2x-5}\log(2x+1) = {}^{2x-5}\log(x+4)$$

Jawab

$^{2x-5}\log(2x+1) = {}^{2x-5}\log(x+4)$

syarat bagi numerus: (i). $2x + 1 > 0$ atau $x > -\frac{1}{2}$
(ii). $x + 4 > 0$ atau $x > -4$
Jadi, persyaratan numerus harus $x > -\frac{1}{2}$

Penyelesaian persamaan:
$^{2x-5}\log(2x+1) = {}^{2x-5}\log(x+4)$
$\Leftrightarrow \quad 2x + 1 = x + 4$
$\Leftrightarrow \quad 2x - x = 4 - 1$
$\Leftrightarrow \quad x = 3$

Substitusi $x = 3$ ke basis $2x - 5$, diperoleh $2(3) - 5 = 1$
Karena syarat $h(x) \neq 1$ tidak terpenuhi, maka $x = 3$ bukan penyelesaian.

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah { } atau $\emptyset$.

5. **Bentuk A[$^{a}\log x$]^2 + B[$^{a}\log x$] + C = 0**

Solusinya dengan mengubah persamaan logaritma ke dalam bentuk persamaan kuadrat dengan memisalkan $^{a}\log x = \text{P}$.

Contoh 5.

Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan $^{3}\log^2 x - {}^{3}\log x^5 + 4 = 0$

Jawab

$^{3}\log^2 x - {}^{3}\log x^5 + 4 = 0$
$\Leftrightarrow \ ({}^{3}\log x)^2 - 5.({}^{3}\log x) + 4 = 0$

Misalkan $^{3}\log x = \text{P}$, maka diperoleh:
$\text{P}^2 - 5\text{P} + 4 = 0$
$\Leftrightarrow \ (\text{P} - 1)(\text{P} - 4) = 0$
$\Leftrightarrow \ \text{P} = 1$ atau $\text{P} = 4$
$\Leftrightarrow \ {}^{3}\log x = 1$ atau $^{3}\log x = 4$
$\Leftrightarrow \ x = 3^1 = 3$ atau $x = 3^4 = 81$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah { 3, 81 }

2. Pertidaksamaan Logaritma

Pertidaksamaan logaritma adalah pertidaksamaan yang numerusnya mengandung variabel, dan tidak menutup kemungkinan bilangan pokoknya juga mengandung variabel.

Untuk menyelesaikan pertidaksamaan logaritma, kita dapat menggunakan sifat fungsi logaritma yaitu monoton naik dan monoton turun. Sifat-sifat tersebut dapat kita deskripsikan sebagai berikut.

Sifat Fungsi Logaritma Monoton Naik (a > 1)

- Jika $^{a}\log f(x) \geq {}^{a}\log g(x)$, maka $f(x) \geq g(x)$; $f(x) > 0$ dan $g(x) > 0$
- Jika $^{a}\log f(x) \leq {}^{a}\log g(x)$, maka $f(x) \leq g(x)$; $f(x) > 0$ dan $g(x) > 0$

Sifat Fungsi Logaritma Monoton Turun (0 < a < 1)

- Jika ${}^{a}\log f(x) \geq {}^{a}\log g(x)$, maka $f(x) \leq g(x)$; $f(x) > 0$ dan $g(x) > 0$
- Jika ${}^{a}\log f(x) \leq {}^{a}\log g(x)$, maka $f(x) \geq g(x)$; $f(x) > 0$ dan $g(x) > 0$

Contoh 6.

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan ${}^{2}\log x^2 \geq {}^{2}\log (2x - 1)$.

Jawab

${}^{2}\log x^2 \geq {}^{2}\log (2x - 1)$

(i) Syarat numerus :
  - $x^2 > 0$, maka $x > 0$
  - $2x - 1 > 0$, maka $x > ½$

(ii) Penyelesaian pertidaksamaan:

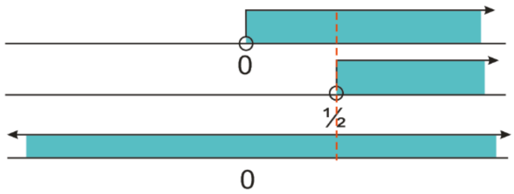
$x^2 \geq 2x - 1$

$x^2 - 2x - 1 \geq 0$

$(x - 1)^2 \geq 0$ .... bentuk ini dipenuhi oleh semua bilangan real

Maka $x \in$ R

Irisan dari hasil (i) dan (ii) diperoleh $x > ½$ (perhatikan gambar garis bilangan di bawah)



Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{ x \mid x > ½ , x \in R \}$

Contoh 7.

Tentukan penyelesaian dari ${}^{\frac{1}{2}}\log(x^2 + x - 2) \geq -2$

Jawab

${}^{\frac{1}{2}}\log(x^2 + x - 2) \geq -2$

(i) syarat numerus:

$x^2 + x - 2 > 0$

$\Leftrightarrow (x + 2)(x - 1) > 0$

$\Leftrightarrow x < -2$ atau $x > 1$

(ii) penyelesaian pertidaksamaan :

${}^{\frac{1}{2}}\log(x^2 + x - 2) \geq -2$

$\Leftrightarrow {}^{\frac{1}{2}}\log(x^2 + x - 2) \geq {}^{\frac{1}{2}}\log 4$

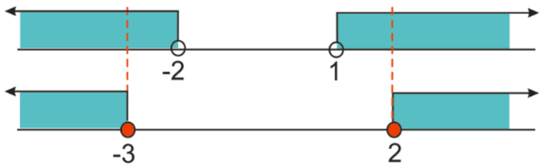
$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 \leq 4$

$\Leftrightarrow x^2 + x - 6 \leq 0$

$\Leftrightarrow (x + 3)(x - 2) \leq 0$

$\Leftrightarrow \quad x \le -3$ atau $x \ge 2$

Irisan dari hasil (i) dan (ii) diperoleh $x \le -3$ atau $x \ge 2$ (perhatikan gambar garis bilangan di bawah)



Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{ x \mid x \le -3 \text{ atau } x \ge 2, x \in R \}$.

C. Rangkuman

- Persamaan logaritma adalah persamaan yang numerusnya mengandung variabel dan tidak menutup kemungkinan bilangan pokoknya juga mengandung variabel.
- Bentuk-bentuk persamaan logaritma:
  a. Bentuk ${}^{a}\log f(x) = {}^{a}\log p$
  Jika ${}^{a}\log f(x) = {}^{a}\log p$, maka $f(x) = p$ asalkan $f(x) > 0$
  b. Bentuk ${}^{a}\log f(x) = {}^{b}\log f(x)$
  Jika ${}^{a}\log f(x) = {}^{b}\log f(x)$ (dengan $a \ne b$), maka $f(x) = 1$
  c. Bentuk ${}^{a}\log f(x) = {}^{a}\log g(x)$
  Jika ${}^{a}\log f(x) = {}^{a}\log g(x)$, maka $f(x) = g(x)$ asalkan $f(x)$ dan $g(x)$ keduanya positif.
  d. Bentuk ${}^{h(x)}\log f(x) = {}^{h(x)}\log g(x)$
  Jika ${}^{h(x)}\log f(x) = {}^{h(x)}\log g(x)$, maka $f(x) = g(x)$ asalkan $f(x)$ dan $g(x)$ keduanya positif serta $h(x) > 0$ dan $h(x) \ne 1$.
  e. Bentuk $A[{}^{a}\log x]^2 + B[{}^{a}\log x] + C = 0$
  Solusinya dengan mengubah persamaan logaritma ke dalam bentuk persamaan kuadrat dengan memisalkan ${}^{a}\log x = P$.
- Pertidaksamaan logaritma adalah pertidaksamaan yang numerusnya mengandung variabel, dan tidak menutup kemungkinan bilangan pokoknya juga mengandung variabel.
- Sifat Fungsi Logaritma Monoton Naik ($a > 1$)

  Jika ${}^{a}\log f(x) \ge {}^{a}\log g(x)$, maka $f(x) \ge g(x)$; $f(x) > 0$ dan $g(x) > 0$
  Jika ${}^{a}\log f(x) \le {}^{a}\log g(x)$, maka $f(x) \le g(x)$; $f(x) > 0$ dan $g(x) > 0$
- Sifat Fungsi Logaritma Monoton Turun ($0 < a < 1$)

  Jika ${}^{a}\log f(x) \ge {}^{a}\log g(x)$, maka $f(x) \le g(x)$; $f(x) > 0$ dan $g(x) > 0$
  Jika ${}^{a}\log f(x) \le {}^{a}\log g(x)$, maka $f(x) \ge g(x)$; $f(x) > 0$ dan $g(x) > 0$

D. Latihan Soal

1. Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan logaritma berikut:
   a. ${}^2\log(x^2 + 4x) = 5$
   b. $\log(x - 2) + (\log(x - 7) = \log 6$
   c. ${}^3\log^2 x - 2.{}^3\log x^2 - 8 = 0$
   d. ${}^{2x-5}\log(2x + 1) = {}^{2x-5}\log(2x + 4)$

2. Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan logaritma berikut:
   a. ${}^3\log(x - 2) < 2$
   b. ${}^2\log(x - 3) + {}^2\log(x + 3) \geq 4$
   c. $2.\log x \leq \log(2x + 5) + 2.\log 2$
   d. ${}^2\log^2 x + 2.{}^2\log 2x > 2$