KEGIATAN PEMBELAJARAN 1
Kemiringan Garis Singgung dan Kemonotan Fungsi Trigonometri

A. Tujuan Pembelajaran

Setelah kegiatan pembelajaran 1 ini, diharapkan Ananda dapat menjelaskan keberkaitan turunan pertama fungsi trigonometri dengan kemiringan garis singgung dan selang kemonotonan fungsi (interval fungsi naik dan fungsi turun) dan dapat menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan kemiringan garis singgung serta persamaan garis singgung dan selang kemonotonan fungsi trigonometri.

B. Uraian Materi

Dalam mempelajari modul Aplikasi Turunan Fungsi Trigonometri ada beberapa materi prasayarat yang harus dipelajari kembali, diantaranya adalah rumus turunan atau diferensial fungsi aljabar dan fungsi trigonometri beserta sifat-sifatnya dan rumus dasar persamaan trigonometri.

Rumus Turunan Fungsi Aljabar dan Trigonometri serta Sifat-sifatnya

Untuk $u = u(x)$ dan $v = v(x)$, berlaku:

- $y = \sin u \Rightarrow y' = \cos u \,.\, u'$
- $y = \cos u \Rightarrow y' = -\sin u \,.\, u'$
- $y = \tan u \Rightarrow y' = \sec^2 u \,.\, u'$
- $y = \cot u \Rightarrow y' = -\csc^2 u \,.\, u'$
- $y = \sec x \Rightarrow y' = \sec x \tan x$
- $y = \csc x \Rightarrow y' = -\csc x \cot x$
- $y = \cos^n u \Rightarrow y' = -n\cos^{n-1} u \,.\sin u \,.u'$
- $y = \sin^n u \Rightarrow y' = n\sin^{n-1} u \,.\cos u \,.u'$
- $y = ax^n \Rightarrow y' = anx^{n-1}$
- $y = u^n \Rightarrow y' = n\, u^{n-1} .\, u'$
- $y = u \pm v \Rightarrow y' = u' \pm v'$
- $y = u \,.\, v \Rightarrow y' = u' .\, v + u \,.\, v'$
- $y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$

Rumus Dasar Persamaan Trigonometri

Untuk menentukan himpunan penyelesaian dari persamaan trigonometri sederhana, perhatikan rumusan berikut.

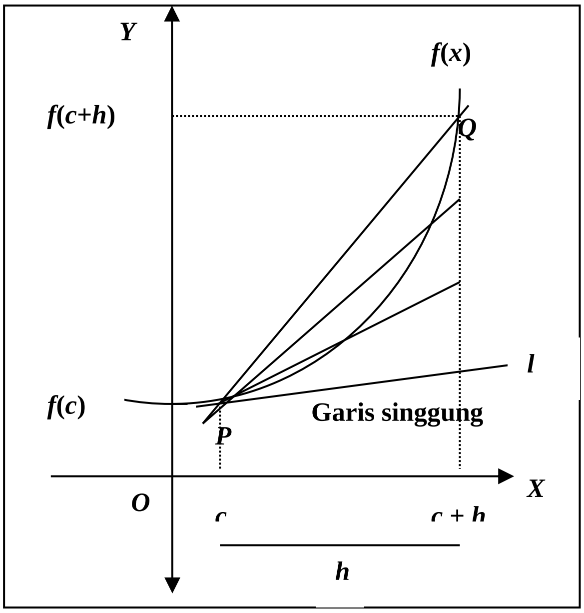
- $\sin x = \sin \alpha$
  - $x = \alpha + n.2\pi$
  - $x = (\pi - \alpha) + n.2\pi$
- $\cos x = \cos \alpha$
  - $x = \alpha + n.\,2\pi$
  - $x = -\,\alpha + n.2\pi$
- $\tan x = \tan \alpha$
  - $x = \alpha + n.\,\pi$

$n \in B = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ dan π dapat diganti dengan 180^o

Nah pada modul pembelajaran kali ini Ananda akan mempelajari di interval dimana fungsi naik dan fungsi turun serta statsionernya.

Kemiringan Garis Singgung

Perhatikan Gambar 2 berikut!



Gambar 2. Konsep kemiringan garis singgung

Misalkan P adalah sebuah titik tetap pada suatu kurva dan andaikan Q adalah sebuah titik berdekatan yang dapat dipindah-pindahkan pada kurva tersebut. Koordinat titik P adalah $(c, f(c))$, titik Q mempunyai koordinat $(c + h, f(c + h))$. Tali busur yang melalui P dan Q mempunyai kemiringan atau gradien

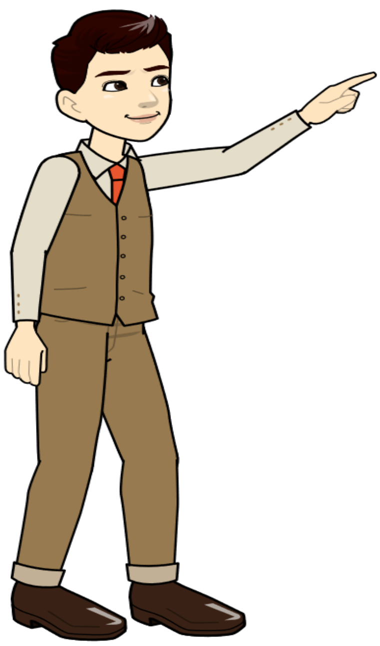
$$m_{PQ} = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Garis l merupakan garis singgung kurva di titik P. Kemiringan (gradien) garis singgung l adalah:

$$m = f\,'(c) = \lim_{h \to 0} m_{PQ} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Persamaan garis singgung kurva $y = f(x)$ dititik (x_1 , y_1) adalah $y - y_1 = m\ (x - x_1)$, dengan $m = f\,'(x_1) = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_1}$

Garis normal adalah garis yang tegak lurus terhadap garis singgung pada titik singgung. Persamaannya adalah $y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$.



Catatan:
Pengertian dua garis sejajar dan tegak lurus sering muncul dalam persamaan garis singgung.

- Misalkan garis $g: y = m_1x + c_1$ sejajar garis $h: y = m_2x + c_2$ di mana m_1 dan m_2 masing-masing gradien dari garis g dan h, maka $m_1 = m_2$.
- Misalkan garis $g: y = m_1x + c_1$ tegak lurus garis $h: y = m_2x + c_2$ di mana m_1 dan m_2 masing-masing gradien dari garis g dan h, maka $m_1 . m_2 = -1$.

Contoh 1

Tentukan gradien garis singgung kurva $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ di $x = \frac{\pi}{2}$.

Penyelesaian:

- Tentukan turunan pertama dari fungsi y

  $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

  $\frac{dy}{dx} = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$
- Tentukan gradien garis singgung m

  $m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{2}}$

  $m = 2\cos\left(2\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\frac{5\pi}{6} = 2\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = -\sqrt{3}$
- Jadi, gradien garis singgung kurva adalah $-\sqrt{3}$.

Contoh 2

Tentukan persamaan garis singgung dan garis normal pada kurva $y = \tan x$ di tiik berabsis $\frac{\pi}{3}$.

Penyelesaian :

- Tentukan titik singgung (x_1, y_1)

  absis = x dan ordinat = y

  $x_1 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow y_1 = \tan x_1$

  $y_1 = \tan\frac{\pi}{3}$

  $= \sqrt{3}$

  Jadi, titik singgungnya $(x_1, y_1) = \left(\frac{\pi}{3}, \sqrt{3}\right)$
- Tentukan turunan pertama fungsi y

  $y = \tan x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sec^2 x$
- Tentukan gradien m

  $m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{3}} = \sec^2\frac{\pi}{3} = (2)^2 = 4$
- Tentukan persamaan garis singgung

  $y - y_1 = m\,(x - x_1)$

  $\Leftrightarrow y - \sqrt{3} = 4\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

  $\Leftrightarrow 3y - 3\sqrt{3} = 12x - 4\pi$ (kedua ruas kalikan dengan 3)

  $\Leftrightarrow 12x - 3y - 4\pi + 3\sqrt{3} = 0$
- Tentukan persamaan garis normal

  $y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$

  $\Leftrightarrow y - \sqrt{3} = -\frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

  $\Leftrightarrow 12y - 12\sqrt{3} = -3x + \pi$ (kedua ruas kalikan dengan 12)

  $\Leftrightarrow 3x + 12y - \pi - 12\sqrt{3} = 0$
- Kesimpulan

  Jadi, persamaan garis singgung kurva $y = \tan x$ di tiik berabsis $\frac{\pi}{3}$ adalah $12x - 3y - 4\pi + 3\sqrt{3} = 0$ dan persamaan garis normalnya adalah $3x + 12y - \pi - 12\sqrt{3} = 0$.

Contoh 3

Diketahui kurva $y = \cos^2 (x + 15^o)$ pada interval $0^o \le x \le 90^o$. Tentukan persamaan garis singgung yang tegak lurus dengan garis $6x + 3y - 1 = 0$.

Penyelesaian :

❖ Tentukan turunan pertama fungsi y

$y = \cos^2 (x + 15^o)$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -2\cos(x + 15^o)\sin(x + 15^o)$

$= -\sin 2(x + 15^o)$

$= -\sin(2x + 30^o)$

❖ Tentukan gradien garis singgung

Misal garis h: $6x + 3y - 1 = 0$

$y = -2x - \frac{1}{3} \Rightarrow m_h = -2$

Misal g adalah garis singgung kurva, karena garis g tegak lurus garis h ($g \perp h$), maka $m_g \,.\, m_h = -1$

$m_g \,.\, (-2) = -1$

$m_g = \frac{1}{2}$

❖ Tentukan titik singgung (x_1, y_1)

$m_g = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_1}$

$\frac{1}{2} = -\sin(2x_1 + 30^o)$

$\sin(2x_1 + 30^o) = -\frac{1}{2}$

$\sin(2x_1 + 30^o) = \sin 210^o$ (sin x = sin α maka $x = \alpha + n.2\pi$ dan $x = (\pi - \alpha) + n.2\pi$)

$2x + 30^o = 210^o + n.360^o$ atau $2x + 30^o = (180^o - 210^o) + n.360^o$

$2x = 180^o + n.360^o$ atau $2x = -60^o + n.360^o$

$x = 90^o + n.180^o$ atau $x = -30^o + n.180^o$

$n = 0 \Rightarrow x = 90^o$ $n = 1 \Rightarrow x = 150^o$ (tidak memenuhi $0^o \le x \le 90^o$)

➢ $x = 90^o \Rightarrow y = \cos^2 (90^o + 15^o) = \cos^2 (105^o)$

$\cos(105^o) = \cos(60^o + 45^o)$

$= \cos 60^o \cos 45^o - \sin 60^o \sin 45^o$

$= \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}.\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$= \frac{1}{4}(\sqrt{2} - \sqrt{6})$

$y = \cos^2 (105^o) = \left(\frac{1}{4}(\sqrt{2} - \sqrt{6})\right)^2 = \frac{1}{16}(8 - 4\sqrt{3}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{3}$

Jadi, titik singgungnya $(x_1, y_1) = (\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{3})$

❖ Tentukan persamaan garis singgung

$y - y_1 = m_g (x - x_1)$

$\Leftrightarrow y - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{3}\right) = \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{2})$

$\Leftrightarrow 4y - 2 + \sqrt{3} = 2x - \pi$ (kedua ruas kalikan dengan 4)

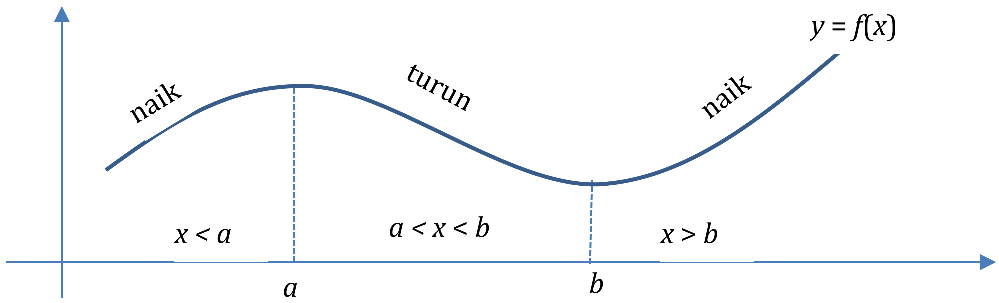
$\Leftrightarrow 2x - 4y - \pi + 2 - \sqrt{3} = 0$

❖ Kesimpulan

Jadi, persamaan garis singgung kurva $y = \cos^2 (x + 15^o)$ pada interval $0^o \le x \le 90^o$ dan tegak lurus dengan garis $6x + 3y - 1 = 0$ adalah $2x - 4y - \pi + 2 - \sqrt{3} = 0$.

Kemonotan Fungsi

Secara grafik, jika kurva suatu fungsi merupakan sebuah kurva mulus, maka fungsi monoton naik dan fungsi monoton turun dapat dengan mudah Ananda amati. Misalnya untuk grafik fungsi yang digambarkan dibawah ini, Ananda dapat mengatakan bahwa fungsi $y = f(x)$ monoton naik pada interval $x < a$ atau $x > b$, monoton turun pada interval $a < x < b$. Kadangkala istilah monoton bisa dihilangkan sehingga menjadi fungsi naik dan fungsi turun.



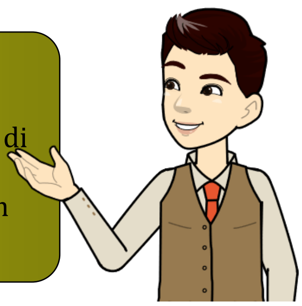
Gambar 3. Interval kurva naik dan turun

Secara aljabar pengertian fungsi naik dan fungsi turun adalah sebagai berikut.

Definisi 1

Misalkan f fungsi trigonometri yang terdefinisi di selang I.

- Fungsi f disebut ***naik*** pada selang I jika untuk setiap x_1 dan x_2 di I, dengan $x_1 < x_2$ maka $f(x_1) < f(x_2)$.
- Fungsi f dikatakan ***turun*** pada selang I jika untuk setiap x_1 dan x_2 di I, dengan $x_1 < x_2$ maka $f(x_1) > f(x_2)$.

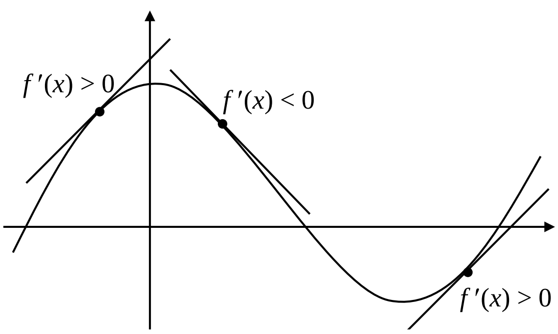


Ingat kembali bahwa turunan pertama $f'(x)$ memberikan makna kemiringan dari garis singgung pada grafik f di titik x. Jika $f'(x) > 0$, garis singgung naik ke kanan (lihat Gambar 3), jika $f'(x) < 0$, garis singgung jatuh ke kanan Untuk menyelidiki atau mencari interval di mana fungsi naik dan di mana fungsi turun, Ananda dapat menggunakan turunan pertama seperti teorema berikut.

Teorema 1

Misalkan f fungsi trigonometri yang terdefinisi di selang I dan f mempunyai turunan di I.

- Jika $f'(x) > 0$ dalam selang I, maka f merupakan fungsi naik.
- Jika $f'(x) < 0$ dalam selang I, maka f merupakan fungsi turun.



Gambar 3 Fungsi naik dan fungsi turun

Agar Ananda lebih mahir dalam menentukan interval di mana fungsi naik dan turun pada fungsi trigonometri, pelajari contoh berikut.

Contoh 4

Tentukan interval fungsi naik dan fungsi turun dari fungsi trigonometri $f(x) = \cos x$ pada interval $[0, 360^o]$.

Penyelesaian :

- Tentukan turunan pertama fungsi $f(x)$

  $f(x) = \cos x$

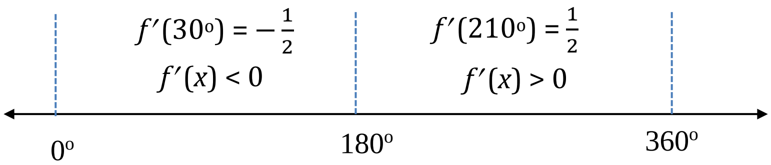
  $f'(x) = -\sin x$ (turunan $y = \cos x$ adalah $y' = -\sin x$)
- Tentukan pembuat nol fungsi $f'(x)$

  $f'(x) = 0$

  $-\sin x = 0$ (kalikan kedua ruas dengan (-1))

  $\sin x = 0$

  $x = 0^o, 180^o, 360^o$
- Uji nilai fungsi $f'(x)$ pada garis bilangan dan beri tanda



Gambar 4 Uji nilai $f'(x)$

- Kesimpulan
  - Syarat $f(x)$ naik adalah $f'(x) > 0$, sehingga berdasarkan Gambar 4 $f(x)$ naik pada interval $180^o < x < 360^o$.
  - Syarat $f(x)$ turun adalah $f'(x) < 0$, sehingga berdasarkan Gambar 4 $f(x)$ turun pada interval $0^o < x < 180^o$.

Contoh 5

Tentukan interval fungsi naik dan fungsi turun dari fungsi trigonometri $f(x) = \sin 2x$ pada interval $[0, \pi]$.

Penyelesaian :

- Tentukan turunan pertama fungsi $f(x)$

  $f(x) = \sin 2x$

  $f'(x) = 2 \cos 2x$ (turunan $y = \sin ax$ adalah $y' = a \cos ax$)
- Tentukan pembuat nol fungsi $f'(x)$

  $f'(x) = 0$

  $2 \cos 2x = 0$ (kalikan kedua ruas dengan $\frac{1}{2}$)

  $\cos 2x = 0$

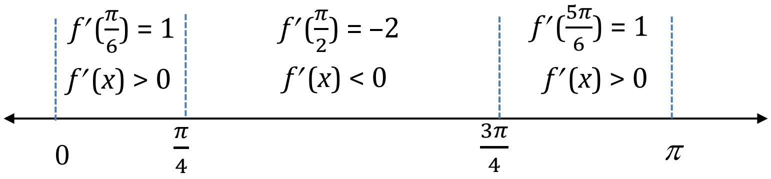
  $\cos 2x = \cos \frac{\pi}{2}$ ($\cos x = \cos \alpha$ maka $x = \alpha + n.2\pi$ dan $x = -\alpha + n.2\pi$)

  $2x = \frac{\pi}{2} + n.\,2\pi$ $\qquad$ $2x = -\frac{\pi}{2} + n.\,2\pi$

  $x = \frac{\pi}{4} + n.\,\pi$ $\qquad$ $x = -\frac{\pi}{4} + n.\,\pi$

  $n = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ $\qquad$ $n = 1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$

- Uji nilai fungsi $f'(x)$ pada garis bilangan dan beri tanda

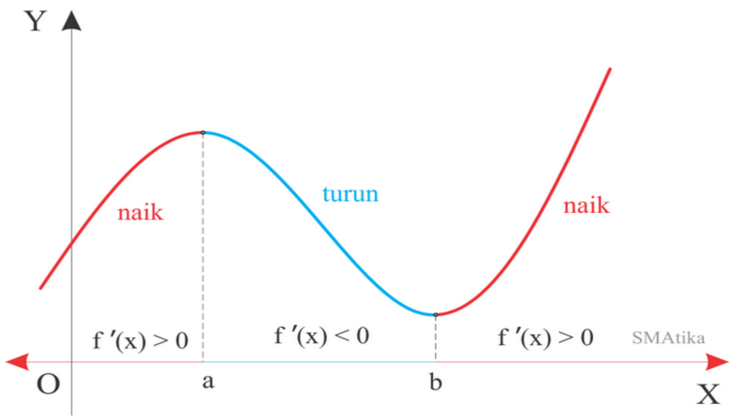


Gambar 5 Uji nilai $f'(x)$

- Kesimpulan
  - Syarat $f(x)$ naik adalah $f'(x) > 0$, sehingga berdasarkan Gambar 5 $f(x)$ naik pada interval $0 \leq x < \frac{\pi}{4}$ atau $\frac{3\pi}{4} < x \leq \pi$.
  - Syarat $f(x)$ turun adalah $f'(x) < 0$, sehingga berdasarkan Gambar 5 $f(x)$ turun pada interval $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$.

C. Rangkuman

- Gradien garis singgung di titik (x_1, y_1) adalah $m = f'(x_1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}$
- Persamaan garis singgung kurva $y = f(x)$ dititik (x_1, y_1) adalah $y - y_1 = m(x - x_1)$, dengan $m = f'(x_1) = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_1}$
- Garis normal adalah garis yang tegak lurus terhadap garis singgung pada titik singgung. Persamaannya adalah $y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$.
- Misalkan f fungsi yang terdefinisi di selang I.
  - Fungsi f disebut ***naik*** pada selang I jika untuk setiap x_1 dan x_2 di I, dengan $x_1 < x_2$ maka $f(x_1) < f(x_2)$.
  - Fungsi f dikatakan ***turun*** pada selang I jika untuk setiap x_1 dan x_2 di I, dengan $x_1 < x_2$ maka $f(x_1) > f(x_2)$.
- Misalkan f fungsi yang terdefinisi di selang I dan f mempunyai turunan di I.
  - Jika $f'(x) > 0$ dalam selang I, maka f merupakan fungsi naik.
  - Jika $f'(x) < 0$ dalam selang I, maka f merupakan fungsi turun.



KEGIATAN PEMBELAJARAN 2

Nilai Maksimum, Nilai Minimum, Titik Belok, dan Kecekungan Fungsi Trigonometri

A. Tujuan Pembelajaran

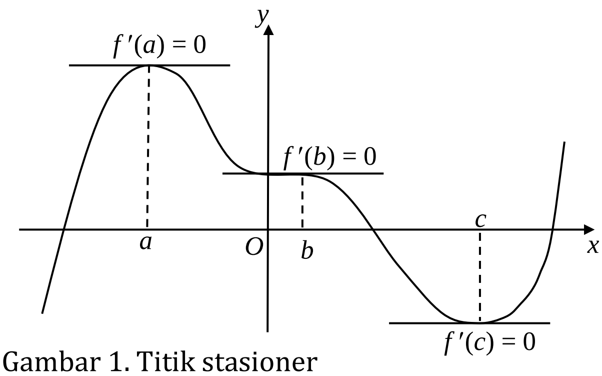
Setelah kegiatan pembelajaran 2 ini, diharapkan Ananda dapat menjelaskan keberkaitan turunan pertama dan kedua fungsi trigonometri dengan nilai maksimum, nilai minimum, titik belok dan selang kecekungan kurva fungsi trigonometri dan dapat menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan nilai maksimum, nilai minimum, titik belok dan selang kecekungan kurva fungsi trigonometri.

B. Uraian Materi

Titik dan Nilai Stasioner Fungsi Trigonometri

Titik stasioner terjadi apabila garis singgung pada kurva di titik tersebut merupakan garis horisontal. Perhatikan Gambar a disamping.

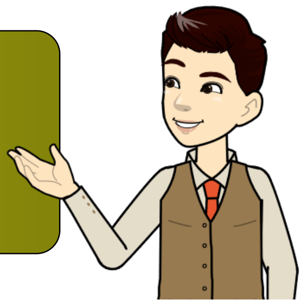
Definisi titik stasioner diberikan sebagai berikut:



Gambar 1. Titik stasioner

Definisi 1

Misalkan f fungsi trigonometri yang yang mempunyai turunan.
Jika $f'(a) = 0$, maka $f(x)$ stasioner di titik $x = a$, dengan
- Nilai $f(a)$ disebut nilai stasioner $f(x)$ di $x = a$.
- Titik $(a, f(a))$ disebut titik stasioner



Contoh 1

Tentukan titik dan nilai stasioner fungsi $y = f(x) = \cos 2x$ pada interval $0 \le x \le 2\pi$

Penyelesaian :

- Tentukan turunan pertama fungsi $f(x)$

  $f(x) = \cos 2x$

  $f'(x) = -2 \sin 2x$ (turunan $y = \cos ax$ adalah $y' = -a \sin ax$)
- Syarat stasioner

  $f'(x) = 0$

  $-2 \sin 2x = 0$ (kalikan kedua ruas dengan $-\frac{1}{2}$)

  $\sin 2x = 0$

$\sin 2x = \sin 0$ ($\sin x = \sin \alpha$ maka $x = \alpha + n.2\pi$ dan $x = (\pi - \alpha) + n.2\pi$)

$2x = 0 + n.\,2\pi$ $2x = \pi + n.\,2\pi$

$x = n.\,\pi$ $x = \frac{\pi}{2} + n.\,\pi$

$n = 0 \Rightarrow x = 0$ $n = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

$n = 1 \Rightarrow x = \pi$ $n = 1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2}$

$n = 2 \Rightarrow x = 2\pi$

❖ Menentukan nilai stasioner

$x = 0 \quad \Rightarrow f(0) = \cos 2(0) = \cos 0 = 1$

$x = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow f(\frac{\pi}{2}) = \cos 2(\frac{\pi}{2}) = \cos \pi = -1$

$x = \pi \quad \Rightarrow f(\pi) = \cos 2(\pi) = \cos 2\pi = 1$

$x = \frac{3\pi}{2} \quad \Rightarrow f(\frac{3\pi}{2}) = \cos 2(\frac{3\pi}{2}) = \cos 3\pi = -1$

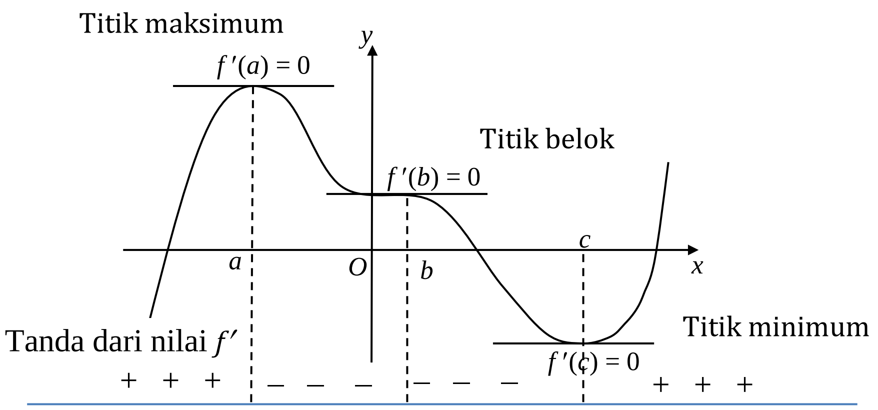
$x = 2\pi \quad \Rightarrow f(2\pi) = \cos 2(2\pi) = \cos 4\pi = 1$

❖ Kesimpulan

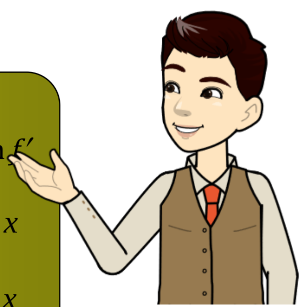
- Nilai stasionernya adalah– 1 dan 1.
- Titik stasionernya adalah $(0, 1)$, $(\frac{\pi}{2}, -1)$, $(\pi, 1)$, $(\frac{3\pi}{2}, -1)$ dan $(2\pi, 1)$.

Uji Turunan Pertama untuk Menentukan Titik Maksimum, Titik Minimum, dan Titik Belok

Perhatikan Gambar 2 berikut, menentukan titik maksimum, titik minimum, dan titik belok menggunakan uji turunan pertama, diuraikan dalam sifat berikut.



Gambar 2. Titik Maksimum, Titik Minimum, dan Titik Belok



Sifat 1

Misalkan f fungsi trigonometri yang yang mempunyai turunan dan $f'(a) = 0$

- Jika nilai f' bertanda positif di $x < a$ dan bertanda negatif di $x > a$, maka $(a, f(a))$ disebut titik maksimum lokal.
- Jika nilai f' bertanda negatif di $x < c$ dan bertanda positif di $x > c$, maka $(c, f(c))$ disebut titik minimum lokal.
- Jika disekitar titik $x = b$ tidak ada perubahan tanda nilai f', maka $(b, f(b))$ disebut titik belok horisontal.

Untuk lebih memahami lagi Ananda dalam menentukan titik maksimum, titik minimum, dan titik belok menggunakan uji turunan pertama, pelajari contoh berikut.

Contoh 2

Menggunakan uji turunan pertama, carilah titik maksimum dan minimum fungsi trigonometri $y = \cos 2x$ pada interval $0 \le x \le 2\pi$.

Penyelesaian :

- Tentukan turunan pertama fungsi $f(x)$

  $f(x) = \cos 2x$

  $f'(x) = -2 \sin 2x$ (turunan $y = \cos ax$ adalah $y' = -a \sin ax$)

- Syarat stasioner

  $f'(x) = 0$

  $-2 \sin 2x = 0$ (kalikan kedua ruas dengan $-\frac{1}{2}$)

  $\sin 2x = 0$

  $\sin 2x = \sin 0$ ($\sin x = \sin \alpha$ maka $x = \alpha + n.2\pi$ dan $x = (\pi - \alpha) + n.2\pi$)

  $2x = 0 + n.\,2\pi$ 　　 $2x = \pi + n.\,2\pi$

  $x = n.\,\pi$ 　　 $x = \frac{\pi}{2} + n.\,\pi$

  $n = 0 \Rightarrow x = 0$ 　　 $n = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

  $n = 1 \Rightarrow x = \pi$ 　　 $n = 1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2}$

  $n = 2 \Rightarrow x = 2\pi$

- Menentukan nilai stasioner

  $x = 0 \Rightarrow f(0) = \cos 2(0) = \cos 0 = 1$

  $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(\frac{\pi}{2}) = \cos 2(\frac{\pi}{2}) = \cos \pi = -1$

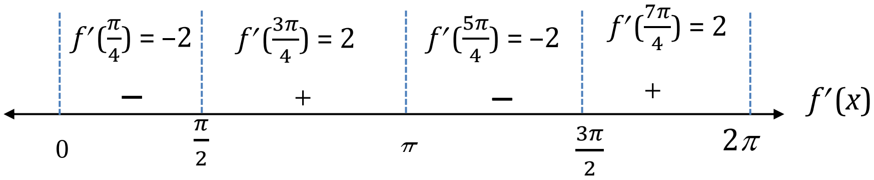
  $x = \pi \Rightarrow f(\pi) = \cos 2(\pi) = \cos 2\pi = 1$

  $x = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow f(\frac{3\pi}{2}) = \cos 2(\frac{3\pi}{2}) = \cos 3\pi = -1$

  $x = 2\pi \Rightarrow f(2\pi) = \cos 2(2\pi) = \cos 4\pi = 1$

  - Nilai stasionernya adalah -1 dan 1.
  - Titik stasionernya adalah $(0, 1)$, $(\frac{\pi}{2}, -1)$, $(\pi, 1)$, $(\frac{3\pi}{2}, -1)$ dan $(2\pi, 1)$.

- Uji nilai fungsi $f'(x)$ pada garis bilangan dan beri tanda



Gambar 3 Uji nilai $f'(x)$

- Kesimpulan
  - Titik $(0, 1)$, $(\pi, 1)$, dan $(2\pi, 1)$ merupakan titik balik maksimum, karena f' berubah tanda dari + (positif) ke – (negatif)
  - titik $(\frac{\pi}{2}, -1)$ dan $(\frac{3\pi}{2}, -1)$ merupakan titik balik minimum, karena f' berubah tanda dari – (negatif) ke + (positif).

Contoh 3

Menggunakan uji turunan pertama, carilah titik maksimum dan minimum fungsi trigonometri $y = \sin x\,(1 + \cos x)$ pada interval $0^o < x < 90^o$.

Penyelesaian :

❖ Tentukan turunan pertama fungsi $f(x)$

$f(x) = \sin x\,(1 + \cos x)$

$f'(x) = \cos x\,(1 + \cos x) + \sin x\,(-\sin x)$ (turunan $y = u\,.\,v$ adalah $y' = u'v + uv'$)

$f'(x) = \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x$

$f'(x) = \cos x + \cos^2 x - (1 - \cos^2 x)$ ($\sin^2 x + \cos^2 x = 1$)

$f'(x) = 2\cos^2 x + \cos x - 1$

❖ Syarat stasioner

$f'(x) = 0$

$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

$(2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0$ (faktorkan)

$\cos x = \frac{1}{2}$ atau $\cos x = -1$

$x = 60^o$ $x = 180^o$ (tidak memenuhi karena $0^o < x < 90^o$)

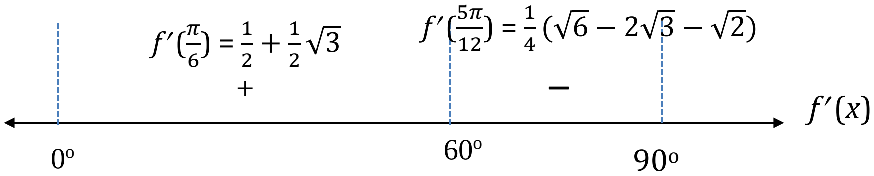
❖ Menentukan nilai stasioner

$x = 60^o \Rightarrow f(60^o) = \sin 60^o\,(1 + \cos 60^o) = \frac{1}{2}\sqrt{3}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{3}$

➢ Nilai stasionernya adalah $\frac{3}{4}\sqrt{3}$.

➢ Titik stasionernya adalah $\left(60^o, \frac{3}{4}\sqrt{3}\right)$.

❖ Uji nilai fungsi $f'(x)$ pada garis bilangan dan beri tanda



Gambar 4 Uji nilai $f'(x)$

❖ Kesimpulan

Titik $\left(60^o, \frac{3}{4}\sqrt{3}\right)$ merupakan titik balik maksimum, karena f' berubah tanda dari + (positif) ke – (negatif)

Contoh 4

Menggunakan uji turunan pertama, carilah titik belok fungsi trigonometri $y = x + \sin x$ pada interval $0 < x < 2\pi$.

Penyelesaian :

❖ Tentukan turunan pertama fungsi $f(x)$

$f(x) = x + \sin x$

$f'(x) = 1 + \cos x$

❖ Syarat stasioner

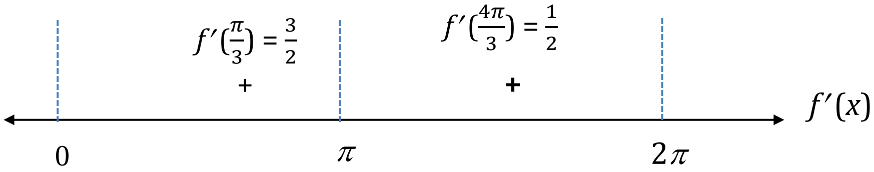
$f'(x) = 0$

$1 + \cos x = 0$

$\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi$

- Menentukan nilai stasioner

  $x = \pi \;\Rightarrow f(\pi) = \pi + \sin \pi = \pi$
  - Nilai stasionernya adalah π.
  - Titik stasionernya adalah $(\pi,\ \pi)$.
- Uji nilai fungsi $f'(x)$ pada garis bilangan dan beri tanda



Gambar 5 Uji nilai $f'(x)$

- Kesimpulan

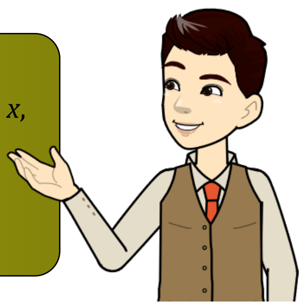
  Titik (π, π) merupakan titik belok, karena f' disekitar titik $x = \pi$ tidak ada perubahan tanda (positif (+) ke positif (+)).

Uji Turunan Kedua untuk Menentukan Titik Maksimum, Titik Minimum, Kecekungan, dan Titik Belok

Sebelum menentukan titik maksimum, titik minimum, kecekungan, dan titik belok menggunakan uji turunan kedua, Ananda harus memahami terlebih dahulu definisi turunan kedua.

Definisi 2

Jika $f'(x)$ (turunan pertama suatu fungsi) diturunkan lagi terhadap x, maka akan diperoleh turunan kedua fungsi $f(x)$ terhadap x, ditulis dengan $f''(x)$ atau y'' atau $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$ atau $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$.



Contoh 5

Tentukan turunan kedua fungsi trigonometri berikut.

a. $y = \sin(2x + \pi)$

b. $y = \cos^2 x$

Penyelesaian :

a. $y = \sin(2x + \pi)$

$y' = 2\cos(2x + \pi)$ (turunan $y = \sin u$ adalah $y' = u' \cos u$)

$y'' = -4\sin(2x + \pi)$ (turunan $y = \cos u$ adalah $y' = -u' \sin u$)

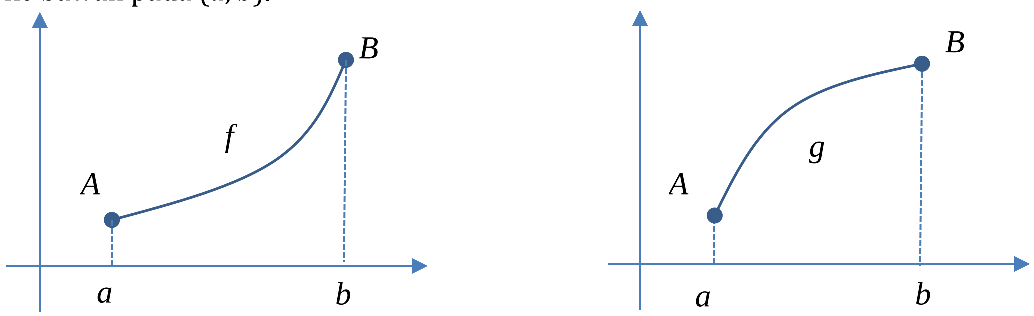
b. $y = \cos^2 x$

$y' = -2\cos x \sin x$ (turunan $y = u^2$ adalah $y' = 2u \cdot u'$)

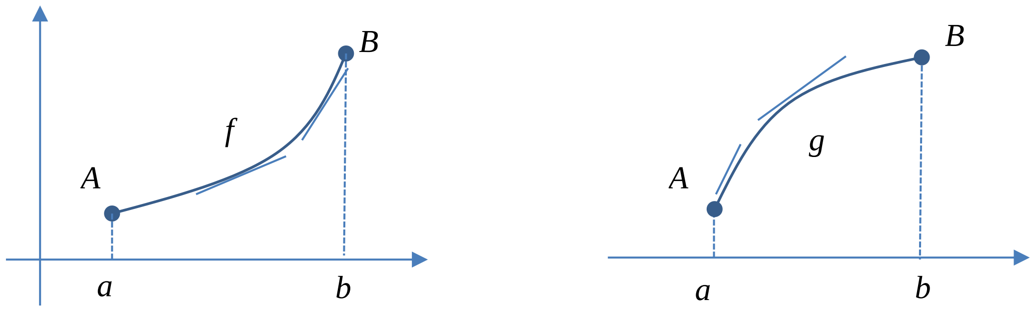
$y' = -\sin 2x$ ($\sin 2x = 2 \sin x \cos x$)

$y'' = -2\cos 2x$ (turunan $y = \sin u$ adalah $y' = u' \cos u$)

Gambar 6 memperlihatkan grafik dua fungsi yang naik pada (a, b). Kedua grafik menghubungkan titik A ke titik B tetapi kelihatan berbeda karena melengkung dalam arah berlainan. Bagaimana Ananda dapat membedakan antara dua tipe kelakuan ini? Dalam Gambar 7 garis singgung pada kurva ini telah digambarkan pada beberapa titik. Dalam (a) kurva terletak di atas garis singgung dan f disebut cekung ke atas pada (a, b). Dalam (b) kurva terletak di bawah garis singgung dan g disebut cekung ke bawah pada (a, b).



Gambar 6 Kecekungan Fungsi

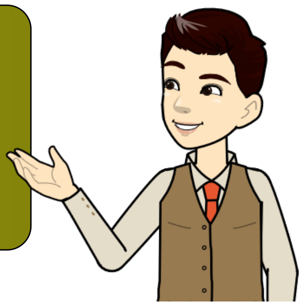


(b) cekung ke atas (a) cekung ke bawah

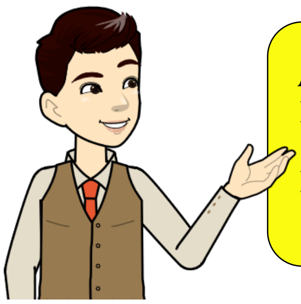
Gambar 7 Kecekungan Fungsi

Definisi 3

- Jika grafik f terletak di atas semua garis singgungnya pada suatu selang I (f' naik) maka grafik disebut cekung ke atas
- Jika grafik f terletak di bawah semua garis singgungnya pada suatu selang I (f' turun) maka grafik disebut cekung ke bawah



Kriteria sederhana untuk memutuskan di mana kurva cekung ke atas dan di mana kurva cekung ke bawah dengan cukup Ananda mengingat dalam hati bahwa turunan kedua dari f adalah turunan pertama dari f'. Jadi, f' naik jika f'' positif dan f' turun jika f''negative, sabagaimana teorema berikut.



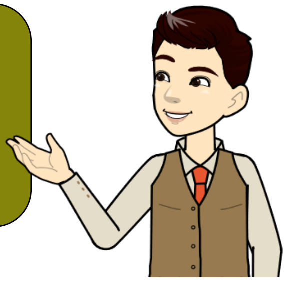
Teorema 1

Andaikan f terturunkan dua kali pada selang terbuka (a, b)
- Jika $f''(x) > 0$ untuk semua x dalam (a, b), maka f cekung ke atas pada (a, b)
- Jika $f''(x) < 0$ untuk semua x dalam (a, b), maka f cekung ke bawah pada (a, b)

Jika kurva pada suatu titik P berubah dari cekung ke atas menjadi cekung ke bawah atau dari cekung ke bawah menjadi cekung ke atas maka titik P disebut titik belok. Secara umum, titik belok adalah titik tempat kurva berubahnya arah kecekungan.

Definisi 4

Misalkan f kontinu di c. Titik $(c, f(c))$ dinamakan titik belok dari grafik f jika f cekung ke atas pada satu sisi dan cekung ke bawah pada sisi yang lainnya dari I. Untuk menentukan titik belok suatu grafik fungsi maka di cari nilai c jika $f''(c) = 0$.



Agar Ananda lebih memahami lagi dalam menentukan kecekungan dan titik belok fungsi trigonometri menggunakan uji turunan kedua, pelajari contoh berikut.

Contoh 6

Tentukan interval di mana fungsi cekung ke atas dan cekung ke bawah dan carilah titik belok fungsi trigonometri $y = x + \cos x$ pada interval $0 < x < 2\pi$.

Penyelesaian :

- Tentukan turunan pertama dan turunan kedua fungsi $f(x)$
  $f(x) = x + \cos x$
  $f'(x) = 1 - \sin x$
  $f''(x) = -\cos x$
- Syarat titik belok
  $f''(x) = 0$
  $-\cos x = 0$
  $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ dan $x = \frac{3\pi}{2}$
- Hitung nilai $f(x)$
  $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$
  $x = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow f(\frac{3\pi}{2}) = \frac{3\pi}{2} + \cos\frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$
- Uji nilai fungsi $f''(x)$ pada garis bilangan dan beri tanda

$f''(\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$	$f''(\pi) = 1$	$f''(\frac{5\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$	
$-$	$+$	$-$	$f''(x)$

$0 \qquad \frac{\pi}{2} \qquad \frac{3\pi}{2} \qquad 2\pi$

Gambar 8 Uji nilai $f''(x)$

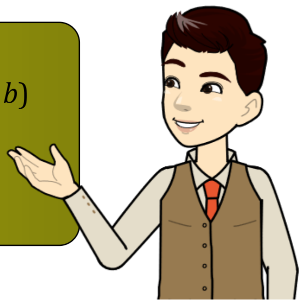
- Kesimpulan
  - Fungsi $f(x)$ cekung ke atas pada interval $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ karena $f''(x) > 0$
  - Fungsi $f(x)$ cekung ke bawah pada interval $0 < x < \frac{\pi}{2}$ atau $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ karena $f''(x) < 0$
  - Titik $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ dan $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ merupakan titik belok, karena di titik $x = \frac{\pi}{2}$ dan $x = \frac{3\pi}{2}$ terjadi perubahan kecekungan.

Penerapan lain dari turunan kedua adalah pengujian untuk nilai maksimum dan minimum yang merupakan akibat dari Uji kecekungan.

Teorema 2

Andaikan f' dan f'' ada pada setiap titik dalam selang terbuka (a, b) yang memuat c, dan andaikan $f''(c) = 0$.

- Jika $f''(c) < 0$, maka $f(c)$ adalah nilai maksimum lokal f.
- Jika $f''(c) > 0$, maka $f(c)$ adalah nilai minimum lokal f.



Agar Ananda lebih memahami lagi dalam menentukan nilai maksimum dan nilai minimum fungsi trigonometri menggunakan uji turunan kedua, pelajari contoh berikut.

Contoh 7

Menggunakan uji turunan kedua, carilah titik maksimum dan minimum fungsi trigonometri $f(x) = x + \sin 2x$ pada interval $0^\circ < x < 180^\circ$.

Penyelesaian :

- Tentukan turunan pertama dan kedua dari fungsi $f(x)$

  $f(x) = x + \sin 2x$

  $f'(x) = 1 + 2\cos 2x$ (turunan $y = \sin ax$ adalah $y' = a \cos ax$)

  $f''(x) = -4 \sin 2x$ (turunan $y = \cos ax$ adalah $y' = -a \sin ax$)

- Syarat stasioner

  $f'(x) = 0$

  $1 + 2\cos 2x = 0$

  $\cos 2x = -\frac{1}{2}$

  $\cos 2x = \cos 120^\circ$ ($\cos x = \cos \alpha$ maka $x = \alpha + n.2\pi$ dan $x = -\alpha + n.2\pi$)

  $2x = 120^\circ + n.360^\circ$ atau $2x = -120^\circ + n.360^\circ$

  $x = 60^\circ + n.180^\circ$ atau $x = -60^\circ + n.180^\circ$

  $n = 0 \Rightarrow x = 60^\circ$ atau $n = 1 \Rightarrow x = 120^\circ$

- Menentukan nilai stasioner

  $x = 60^\circ \Rightarrow f(60^\circ) = 60^\circ + \sin 120^\circ = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$

  $x = 60^\circ \Rightarrow f(120^\circ) = 120^\circ + \sin 240^\circ = \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$

- Uji turunan kedua

  $f''(x) = -4 \sin 2x$

  $f''(60^\circ) = -4 \sin 120^\circ = (-4)\frac{1}{2}\sqrt{3} = -2\sqrt{3} < 0$

  $f''(120^\circ) = -4 \sin 240^\circ = (-4)(-\frac{1}{2}\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} > 0$

- Kesimpulan

  Titik $\left(60^\circ, \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ merupakan titik balik maksimum, karena $f'' < 0$.

  Titik $\left(120^\circ, \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ merupakan titik balik minimum, karena $f'' > 0$.

Bagaimana menyelesaikan masalah fungsi trigonometri dalam kehidupan sehari-hari? Untuk memahaminya, pelajari Contoh 7 berikut.

Contoh 7

Sebuah rumah panggung dihubungkan dengan sebuah tangga menuju halamannya. Tangga tersebut ditopang oleh kayu dengan tinggi 2 m dan berjarak 2 m dari rumah. Jika permukaan tanah disekitar rumah dianggap datar dan tinggi tiang penyangga rumah tegak lurus pada permukaan tanah, tentukan panjang minimum dari tangga rumah tersebut.

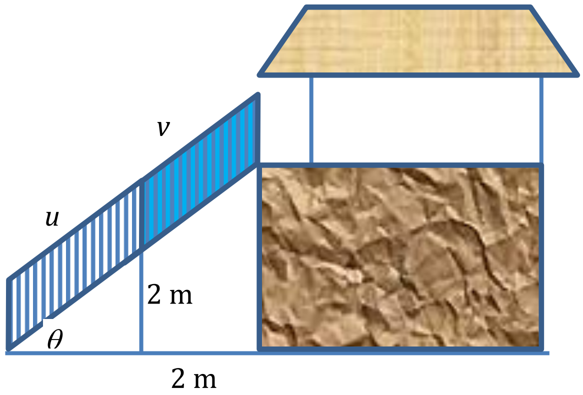
Penyelesaian :

❖ Buat pemodelan dari permasalahan

Misalkan θ, dengan $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ adalah sudut antara tangga dan permukaantanah dan panjang tangganya adalah $u + v$, maka

$\sin\theta = \frac{2}{u} \Rightarrow u = \frac{2}{\sin\theta}$ dan

$\cos\theta = \frac{2}{v} \Rightarrow v = \frac{2}{\cos\theta}$



Gambar 9. Panjang tangga rumah

Sehingga panjang tangga dapat dimodelkan dalam bentuk fungsi berikut

$f(\theta) = u + v = \frac{2}{\sin\theta} + \frac{2}{\cos\theta} = 2\csc\theta + 2\sec\theta$

Tujuan kita adalah mencari nilai minimum dari fungsi tersebut.

❖ Tentukan turunan pertama fungsi $f(\theta)$

$f(\theta) = 2\csc\theta + 2\sec\theta$

$f'(\theta) = -2\csc\theta\cot\theta + 2\sec\theta\tan\theta$

❖ Syarat stasioner

$f'(x) = 0$

$-2\csc\theta\cot\theta + 2\sec\theta\tan\theta = 0$

$\sec\theta\tan\theta = \csc\theta\cot\theta$

$\frac{1}{\cos\theta}\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$\frac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta} = 1$

$\tan^3\theta = 1$

$\tan\theta = 1$

$\theta = \frac{\pi}{4}$, karena $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

❖ Menentukan nilai stasioner

$\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow f(\frac{\pi}{4}) = 2\csc\frac{\pi}{4} + 2\sec\frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

❖ Kesimpulan

Jadi, panjang tangga minimum dari rumah ke tanah adalah $4\sqrt{2}$ m.